

La matrice des covariances et l'espérance de rentabilité de trois actifs financiers A, B et C se présentent comme suit en % :

	Actif A	Actif B	Actif C	Espérance de rentabilité
Actif A	8	-1	-0,8	22
Actif B	-1	15	-0,4	20
Actif C	-0,8	-0,4	20	24

Question : Trouvez les proportions à investir dans les actifs A, B et C de manière à maximiser la différence entre rentabilité et risque

Corrigé

1-Multiplier la matrice des covariances par 2, dénommer actif A, actif B et actif C respectivement X1, X2 et X3, donner les valeurs de 1 à X1, X2 et X3 dans la contrainte d'égalité (X1+X2+X3=1) et attribuer au lagrangien λ les valeurs ci-dessous :

	Actif A (X1)	Actif B (X2)	Actif C(X3)	λ
Actif A (X1)	16	-2	-1,6	1
Actif B (X2)	-2	30	-0,8	1
Actif C (X3)	-1,6	-0,8	40	1
Contrainte d'égalité	1	1	1	0

2- Ecrire de système d'équation à partir du tableau ci-dessus :

- L1 16X1-2X2-1,6X3+ λ = 22
- L2 -2X1+30X2-0,8X3+λ = 20
- L3 -1,6X1-0,8X2+40X3+λ = 24
- L4 1X1+1X2+1X3+0λ=1

3- Eliminer progressivement les variables ; commençons par λ Pour ce faire, on envisage les opérations suivantes L1-L2 et L3-L2 en gardant L4 telle quelle est :

- L1-L2 : 18X1-32X2-0,8X3=2 (L'1)
- L3-L2 : 0,4X1-30,8X2+40,8X3=4 (L'2)
- L4 : X1+X2+X3=1(L'3)

On élimine maintenant X3. Ainsi, il faut $\frac{40,8 \text{ (coefficient de X3 dans L'2)}}{-0,8 \text{ (coefficient de X3 dans L'1)}} = -51$

On envisage alors les opérations suivantes : -51L'1-L'2 et L'2-40,8L'3
On aura alors le système suivant :

$$\begin{aligned} -918,4X1+1662,8X2 &= -106 \\ -40,4X1-71,6X2 &= -36,8 \end{aligned}$$

Utilisons la méthode de Cramer : $\Delta = \begin{vmatrix} 918,4 & 1662 \\ -40,4 & -71,6 \end{vmatrix} = (-918,4*-71,6) - (1662*-40,4) = 132934,56$

$$\Delta X1 = \begin{vmatrix} -106 & 1662,8 \\ -36,8 & -71,6 \end{vmatrix} = 68780,64, \text{ alors } X1 = \frac{\Delta X1}{\Delta} = 0,517 \quad \Delta X2 = \begin{vmatrix} 918,4 & 1662 \\ -106 & -36,8 \end{vmatrix} = 29514,72, \text{ alors } X2 = \frac{\Delta X2}{\Delta} = 0,222$$

Enfin, X3=1-(0,517+0,222) = 0,261