Demande constante avec contraintes

La commande d'une quantité donnée est, dans la pratique, conditionnée par la disponibilité d'un ensemble de ressources : financières, matérielles (aire de stockage, manutention, transport…), informationnelles (capacité cybernétique, supports d'information…) et humaines. Ainsi, la quantité économique au sens de Wilson se trouve affectée par la limitation des ressources précitées dans le temps et l'espace.

L'optimisation du coût total avec contraintes se pose comme suit :

$CT = \sum CL_i * \frac{D_i}{Q_i} + \frac{Q_i}{2} * CS_i$ sous une ou plusieurs contraintes de type $G(Q) = \sum \alpha_i * Q_i = C$

Demande constante avec contraintes (suite)

Pour réaliser cette optimisation, le lagrangien s'avère le plus opérant en

envisageant une fonction F (Q) = CT+λ*G(Q) et en respectant les conditions du premier ordre $\frac{\delta F(Q)}{\delta Q_i} = 0$; $\frac{\delta F(Q)}{\delta \lambda} = 0$ et les conditions du second ordre pour s'assurer qu'il s'agit effectivement d'un minimum. Pour ce faire, il faut montrer que les (n-1) mineurs principaux orthogonaux de la matrice hessienne bordée $H_{F(Q)}(Q_i,\lambda)$ sont tous inférieurs à 0

(Cette condition est valable dans le cas où il y a une seule contrainte G(Q))

La matrice hessienne bordée est la matrice des dérivées partielles secondes de F (Q) par rapport à Q_i, bordée par les dérivées partielles premières de G

$$HB = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \partial G(1) \\ \hline \partial G(1) & \partial F(2) \end{array}\right)$$

Une entreprise achète et stocke deux articles X et Y ayant les caractéristiques suivantes :

Eléments	X	Y
Demande de la période	1000 unités	1960 unités
CL (coût de passation)	50 dhs	50 dhs
CS (coût de possession) unitaire de la période	100 dhs	64 dhs
Espace de stockage occupé par unité	0,05 m^2	0,08 m^2

Questions

1- Déterminez les quantités de X et Y (valeurs entières) compte tenu de la contrainte de stockage dont la capacité maximale est de 4,05 m^2

2- Montrez à travers la matrice hessienne bordée qu'il s'agit effectivement d'un coût total minimum

Corrigé

1. Quantités de X et Y satisfaisant la contrainte de stockage

$$CT = \left(\frac{50*1000}{X} + 100*\frac{X}{2}\right) + \left(\frac{50*1960}{Y} + 64*\frac{Y}{2}\right)$$

$G = 0,05X + 0,08Y - 4,05$

$$F(Q) = \left(\frac{50*1000}{X} + 100*\frac{X}{2}\right) + \left(\frac{50*1960}{Y} + 64*\frac{Y}{2}\right) + \lambda*(0,05X + 0,08Y - 4,05)$$

$$(1)\quad \frac{\partial F(Q)}{\partial X} = \frac{-50000}{X^2} + 50 + 0,05\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1000000}{X^2} - 1000$$

$$(2)\quad \frac{\partial F(Q)}{\partial Y} = \frac{-98000}{Y^2} + 32 + 0,08\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1225000}{Y^2} - 400$$

$$(3)\quad \frac{\partial F(Q)}{\partial \lambda} = 0,05X + 0,08Y - 4,05 = 0 \Rightarrow X = \frac{4,05 - 0.08Y}{0,05} = 81 - 1,6Y$$

$(1) = (2) \Rightarrow 1000000\ Y^2 - 1225000\ X^2 - 600 X^2\ Y^2 = 0$

En remplaçant X par 81-1,6Y selon (3), on aura :

$1000000\ Y^2 - 1225000\,(81-1,6Y)^2 - 600(81-1,6)^2 \cdot Y^2 = 0$

$2,56Y^4 - 259,2Y^3 + 10121Y^2 - 529200Y + 13395375 = 0$

Corrigé (suite)

$13395375 = 3^7 \times 5^3 \times 7^2$

Les diviseurs de 13395375 résultent des différentes combinaisons de $3^7 \times 5^3 \times 7^2$

Mais, on sait que 0,05X+0,08Y=4,05

0,08Y= 4,05-0,05X

$Y = \frac{4,05}{0,08} - \frac{0,05X}{0,08}$; Dans l'hypothèse la plus faible X=0 ⇨ Y= 50,625 ≈ 51

Ainsi, on retiendra les diviseurs inférieurs à 51 :

Diviseurs de 13395 375={49,45,35,27,25,21,15,9,7,5,3}

Corrigé (suite)

Pour résoudre le système d'équations, on utilisera la méthode de Horner :

2,56	-259,2	10121	-529200	13395375	D
2,56	-133,76 [(1)]	3566,76 [(2)]	-354428,76 [(3)]	-3971634,24 [(4)]	49
2,56	-144	3641	-365355	-3045600	45
2,56	-169,6 [(5)]	4185 [(6)]	-382725 [(7)]	0 [(8)]	35

(1) $2{,}56\times 49-259{,}2 = -133{,}76$

(2) $-133{,}76*49+10121 = 3566{,}76$

(3) $3566.76 *49-529200=-354428{,}76$

(4) $-354428.76*49+13395375$

(5) $2{,}56\times 35-259{,}2= -169.6$

(6) $-16916*35+10121 =4185$

(7) $4185*35-529200 = -382725$

(8) $-382725*35+ 13395375 =0$

Ainsi, Y=35 est une solution du système (le reste de la division euclidienne =0)

Solution : y=35 ; $X=81-1{,}6Y = 81-1{,}6\times 35 = X=25$

D'autres solutions peuvent être dans l'équation ci-dessous :

$$(Y - 35)(2{,}56Y^3 - 169{,}6Y^2 + 4185Y - 382725)=0$$

Corrigé (suite)

1. Matrice Hessienne bordée (HB):

G=0,05X+0,08Y-4,05

$$f(Q) = \frac{50000}{X} + 5000 + \frac{98000}{Y} + 32Y + \lambda(0{,}05x + 0{,}08y - 4{,}05)$$

$$\frac{\partial G(1)}{\partial X} = 0{,}05 \quad ; \quad \frac{\partial G(1)}{\partial Y} = 0{,}08$$

$$\frac{\partial f(2)}{\partial X\,\partial X} = \left(\frac{-50000}{X^2} + 50 + 0{,}05\lambda\right)' = \frac{100000}{X^3}$$

$$\frac{\partial f(2)}{\partial Y\,\partial Y} = \left(\frac{98000}{y^2} + 32 + 0{,}087\right)' = \frac{196000}{Y^3}$$

$$\frac{\partial f(2)}{\partial X\,\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial f(2)}{\partial Y\,\partial X} = 0$$

Corrigé (suite)

$$HB = \begin{pmatrix} 0 & 0,05 & 0,08 \\ 0,05 & \frac{100000}{X^3} & 0 \\ 0,08 & 0 & \frac{196000}{Y^3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Det(HB)} = -0,05 * \begin{vmatrix} 0,05 & 0 \\ 0,08 & \frac{196000}{Y^3} \end{vmatrix} + 0,08 \begin{vmatrix} 0,05 & \frac{100\,000}{X^3} \\ 0,08 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

Donc, il s'agit bien d'un minimum (la fonction du coût total est minimisée).