Gestion calendaire

Cas d’une demande aléatoire avec perte sur les excédents et coût de pénurie

Absence du coût de stockage qui est remplacé par une perte sur les ventes des excédents des stocks

Cas d’une demande aléatoire avec coût de pénurie et coût de stockage

Cas d'une demande aléatoire avec perte sur les excédents et coût de pénurie : cas d'une variable discrète

$$E(C) = C1 * \sum_{D=0}^{S} (S-D).P(D) + C2 * \sum_{D=S+1}^{\infty} (D-S).P(D)$$

E(C) : espérance mathématique du coût

S-D : situation de surstock

D-S : situation de pénurie

C1 : perte unitaire sur ventes du surstock

C2 : coût de pénurie (rupture)

En procédant à un calcul marginal, nous aurons :

$E(C+1) = E(C) + (C1+C2)*P(D \leq S) - C2$; il faut que $(C1+C2)*P(D \leq S) - C2 > 0 \Rightarrow P(D \leq S) > \frac{C2}{C1+C2}$

$E(C-1) = E(C) - (C1+C2)*P(D \leq S-1) + C2$; il faut que $-(C1+C2)*P(D \leq S-1) + C2 < 0 \Rightarrow P(D \leq S-1) < \frac{C2}{C1+C2}$

Donc, l'optimum du coût est atteint lorsque : $P(D \leq S-1) < \frac{C2}{C1+C2} < P(D \leq S)$

Application

Dans une entreprise la perte unitaire sur l'excédent des stocks vendable est de 50 dh alors que le coût unitaire de pénurie est de 1000 dh. La distribution de la demande est donnée par le tableau suivant :

Niveau du stock : S et de la demande D	P (D)
0	0,9
1	0,05
2	0,02
3	0,01
4	0,01
5	0,01
>5	0

Questions :

1- Déterminez le niveau du stock optimal

2- Calculer l'espérance mathématique du coût du stock optimal

Corrigé

1. **Niveau du stock optimal**

Le stock est optimal lorsque la condition suivante est respectée : $P\{D \leq S-1\} < \frac{C2}{C1+C2} < P\{D \leq S\}$.

S, D	P(D)	P {D≤ S}	P{D≤ S-1
0	0,9	0,9	-
1	0,05	0,95	0,9
2	0,02	0,97	0,95
3	0,01	0,98	0,97
4	0,01	0,99	0,98
5	0,01	1	0,99
>5	0	1	1

$$\frac{C2}{C1+C2} = \frac{1000}{50+1000} = 0{,}952$$

Donc S = 2

2. **Espérance mathématique du coût du stock optimal**

$$C1 * \sum_{D=0}^{S} (S-D).P(D) + C2 * \sum_{D=S+1}^{\infty} (D-S).P(D)$$

$= 50*((2-0)*0{,}9+(2-1)*0{,}05)+1000*((3-2)*0{,}01+(4-2)*0{,}01+(5-2)*0{,}01) = 152{,}5$ DH.

Cas d'une demande aléatoire avec perte sur les excédents et coût de pénurie : cas d'une variable continue

Dans ce cas, la distribution de probabilité P (D) est remplacée par la densité de probabilité f(D). Nous aurons alors E (CS) = $C1*\int_0^S (S-D).f(D).dD + C2*\int_S^\infty (D-S).f(D).dD$. En dérivant par rapport à S, nous obtenons : E (CS)' = $C1*\int_0^S f(D).dD - C2*\int_S^\infty f(D).dD =$

C1*F(S) - C2*(1-F(S)) = (C1+C2)*F(S) - C2. En annulant la dérivée, nous aurons F(S)= $\frac{C2}{C1+C2}$. Ainsi, l'optimum de S est obtenu lorsque la fonction de répartition

$$\boxed{F(S)=\frac{C2}{C1+C2}.}$$

Application

Dans une entreprise la demande (Dt) suit une loi normale de moyenne (E(Dt)) de 1000 et d'écart-type σ(Dt) de 200. Elle supporte un coût unitaire de pénurie de 950 DH et une perte unitaire sue surstock de 50DH.

Questions

1- Déterminer le stock S qui minimise l'espérance mathématique du coût total

2- Déterminer le stock de sécurité

Corrigé

$$\frac{C2}{C1+C2} = \frac{950}{950+50} = 0{,}95 \Rightarrow$$ Z=1,645 (voir table de la loi normale)

$$F(S) = P(S < Dt) = P\left(S < \frac{S - E(Dt)}{\sigma(Dt)}\right) \Rightarrow \frac{S-1000}{200} = 1{,}645$$

1-Calcul de S

S=1000+200*1,645= 1329

2-Calcul de SS

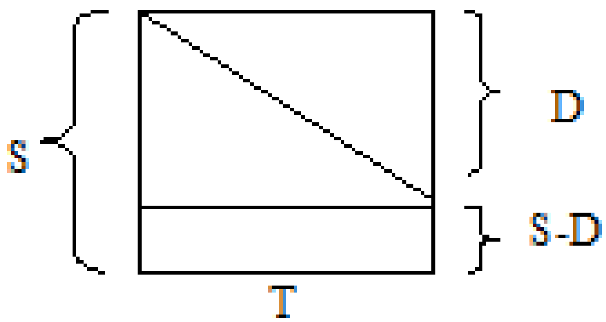
SS= SR-E(Dt) = 1329-1000=329

SS= 200*1,645 = 329

Cas d’une demande aléatoire avec coût de pénurie et coût de stockage

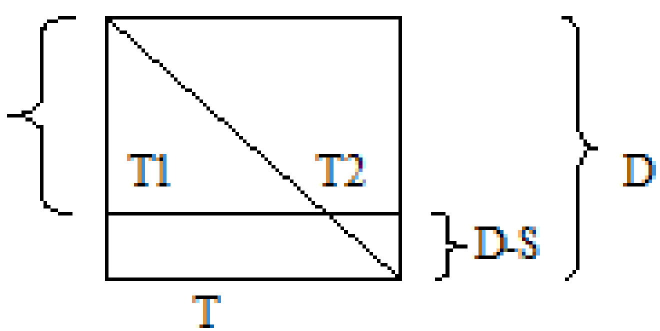
Dans ce cas, les deux situations suivantes sont possibles : $D \leq S$ et $D > S$.

* $D \leq S$ Cette situation est visualisée par le schéma suivant :



Le stock moyen est égal à $= \dfrac{S+(S-D)}{2} \; \dfrac{2S-D}{2} = S- \dfrac{D}{2}$

* $D > S$ Cette situation est représentée par le schéma suivant :



Cas d'une demande aléatoire avec coût de pénurie et coût de stockage

A partir des propriétés des triangles homothétiques, il est possible d'écrire les égalités suivantes : $\frac{T1}{T} = \frac{S}{D} \Rightarrow T1 = \frac{S * T}{D}$ et $\frac{T2}{T} = \frac{D - S}{D} \Rightarrow T2 = \frac{(D - S) * T}{D}$

T1 : période de T où le stock est suffisant pour faire face à la demande. Pendant cette période, stock moyen $= \frac{S}{2} * \frac{T1}{T} = \frac{1}{2} * \frac{S^2}{D}$.

T2 : période de T où il y a pénurie de (D-S). Pendant cette période, la pénurie moyenne =

$$\frac{D - S}{2} * \frac{T2}{T} = \frac{1}{2} * \frac{(D - S)^2}{D}.$$

Donc, $E(C) = CS * \sum_{D=0}^{S} (S - \frac{D}{2}).P(D) + CS * . \sum_{D=S+1}^{\infty} (\frac{1}{2} * \frac{S^2}{D}).P(D) + CP * \sum_{D=S+1}^{\infty} (\frac{1}{2} * \frac{(D - S)^2}{D}).P(D)$

Cas d'une demande aléatoire avec coût de pénurie et coût de stockage

$$E\,(CS+1) = CS*\sum_{D=0}^{S+1}(S+1-\frac{D}{2}).P(D)+CS*\sum_{D=S+2}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(S+1)^2}{D}).P(D)+CP*\sum_{D=S+2}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(D-S-1)^2}{D}).P(D)$$

$$E\,(CS+1) = E\,(CS) + (CS+CP)*[P\,(D\leq S) + (S+\frac{1}{2})*\sum_{D=S+1}^{\infty}\frac{P(D)}{D}] - CP.$$ En posant

$$L(S) = P\,(D\leq S) + (S+\frac{1}{2})*\sum_{D=S+1}^{\infty}\frac{P(D)}{D},\ E\,(CS+1) = E\,(CS) + (CS+CP)*L(S) - CP$$

En procédant de même, nous obtenons :

$$E\,(CS-1) = E\,(CS) - (CS+CP)*L(S-1) + CP$$

Cas d'une demande aléatoire avec coût de pénurie et coût de stockage

Dans la mesure où L(S) est croissante avec S, nous pourrons affirmer que les unités en plus et en moins seront justifiées dans le cas où les conditions respectives suivantes sont accomplies :

- $(CS+CP)*L(S) - CP > 0 \Rightarrow L(S) > \frac{CP}{CS+CP}$
- $-(CS+CP)*L(S-1) + CP < 0 \Rightarrow L(S-1) < \frac{CP}{CS+CP}$

Finalement la valeur S qui minimise l'espérance mathématique du coût du stock doit satisfaire

la condition suivante : $\boxed{L(S-1) < \frac{CP}{CS+CP} < L(S)}$

$$L(S) = P(D \leq S) + \left(S + \frac{1}{2}\right) * \sum_{D=S+1}^{\infty} \frac{P(D)}{D}$$

L(S-1) est la valeur antérieure de L(S)

Application

Dans une entreprise les coûts de stockage et pénurie sont respectivement de 100000 dh et 1900000 dh. La distribution de la demande se présente comme suit :

Niveau du stock : S et de la demande D	Nombre d'occurrences
0	5
1	10
2	10
3	15
4	5
5	5
>5	0

Questions :

1- Déterminez le niveau du stock optimal

2- Calculer l'espérance mathématique du coût du stock optimal

Corrigé

1. Niveau du stock optimal

Le stock est optimal lorsque la condition suivante est respectée : $L(S-1) < \frac{CP}{CS+CP} < L(S)$ Avec

$L(S) = P(D \leq S) + (S+\frac{1}{2}) * \sum_{D=S+1}^{\infty} \frac{P(D)}{D}$; CS et CP sont respectivement coût de stockage et de pénurie.

S, D	Occurrences	P(D)	P(D)/D	∑P(D)/D	(S+1/2)	(S+1/2)*∑P(D)/D	P (D≤S)	L(S)	L(S-1)
0	5	0,10	∞	0,445	0,5	0,2225	0,10	0,3225	-
1	10	0,20	0,20	0,245	1,5	0,3675	0,30	0,6675	0,3225
2	10	0,20	0,10	0,145	2,5	0,3625	0,50	0,8625	0,6675
3	**15**	**0,30**	**0,10**	**0,045**	**3,5**	**0,1575**	**0,80**	**0,9575**	**0,8625**
4	5	0,10	0,025	0,02	4,5	0,09	0,90	0,99	0,9575
5	5	0,10	0,02	0	5,5	0	1	1	0,99
>5	0	0	0	0	∞	0	1	1	1
∑	50	1							

$\frac{CP}{CS+CP} = \frac{1900000}{100000+1900000} = 0{,}95$; $0{,}8625 < 0{,}95 < 0{,}9575$; **Donc S = 3**

2 . Espérance mathématique du coût optimal

$$CS * \sum_{D=0}^{S} (S - \frac{D}{2}).P(D) + CS * . \sum_{D=S+1}^{\infty} (\frac{1}{2} * \frac{S^2}{D}).P(D) + CP * \sum_{D=S+1}^{\infty} (\frac{1}{2} * \frac{(D-S)^2}{D}).P(D)$$

=100000*((3-0)*0,1+(3-1/2)*0,2+(3-2/2)*0,2+(3-3/2)*0,3)+ 100000*(9/(2*4)*0,1+9/(2*5)*0,1) + 1900000*(PUISSANCE((4-3);2)/(2*4)*0,1+PUISSANCE((5-3);2)/(2*5)*0,1) = 285000 DH.

Table statistique Z $\rightarrow$ 2α (α=seuil d'erreur)

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

Table statistique Z $\rightarrow$ α (α=seuil d'erreur)

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861