# Gestion des actifs financiers

Un actif financier est un ensemble de:

-Actions

-Obligations

-Titres de créances

-Options (d’achat, de ventes et d’échange)

- Devises

# Gestion des actifs financiers

Différence entre un marché financier et une bourse de valeurs:

Marché financier a pour fonction la création des actifs financiers

Bourse des valeurs = lieu où il y a achat, vente et échange des actifs financiers

# Portefeuille des actifs financiers

est l'ensemble des actifs financiers détenus par l'entreprise

# Stratégies de gestion des actifs financiers

- Stratégie passive = se référer au marché (information efficiente)

- Stratégie active = se référer partiellement au marché et essayer de le battre (information semi-efficiente)

- Stratégie alternative = se déconnecter du marché (information non efficiente)

# Modèles de gestion des actifs financiers

1- Modèle espérance mathématique-Variance

2- Modèle d’équilibre des actifs financiers

3- Modèle APT (Arbitrage Pricing Theory)

# Modèle espérance mathématique-variance

Cas de deux actifs financiers A et B

Espérance mathématique : $E(P)=xE(RA)+(1-x)E(RB)$

Variance: $V(P)= x^2V(RA)+(1-x)^2V(RB)+2x(1-x)COV(RA,RB)$

| | xV(RA) | (1-X)V(RB) |
|---|---|---|
| xV(RA)<br>(1-X)V(RB) | $X^2V(RA)$<br>(1-x)xCOV(RB,RA) | X(1-x)COV(RA,RB)<br>$(1-x)^2V(RB)$ |

NB. Pour avoir l'espérance mathématique et la variance en valeur, il faut les pondérer par le budget.

# Modèle espérance mathématique-variance

Le Financier est intéressé particulièrement à la proportion x pour A et (1-x) pour B qui minimise le risque financier. Ainsi, il faut dériver V(P) par rapport à x et annuler la dérivée tout en l'égalant à 0 :

$$V(P)= x^2V(RA)+(1-x)^2V(RB)+2x(1-x)COV(RA,RB) =$$

$$x^2V(RA)+(1+x^2-2x)V(RB)+(2x-2x^2)COV(RA,RB)$$

$$\frac{\delta V(P)}{\delta x} = 2xV(RA) + 2xV(RB) - 2V(RB) + 2COV(RA, RB) - 4xCOV(RA,RB) = 0$$

$$\frac{\delta V(P)}{\delta x} = xV(RA) + xV(RB) - V(RB) + COV(RA,RB) - 2xCOV(RA,RB) = 0$$

$$xV(RA) + xV(RB) - 2xCOV(RA,RB) = V(RB) - COV(RA,RB)$$

$$x[V(RA) + V(RB) - 2COV(RA,RB)] = V(RB) - COV(RA,RB)$$

$$x = \frac{V(RB) - COV(RA,RB)}{V(RA) + V(RB) - 2COV(RA,RB)}$$

# Modèle espérance mathématique-variance: TD

Soit un portefeuille composé de deux actifs financiers A et B dont les caractéristiques sont les suivantes :

E(RA) = 12%

E(RB) = 10%

V(RA) = 8%

V(RB)= 7%

COV (RA,RB)=-0.448%

**Questions :**

1-Déterminez la structure du portefeuille qui minimise son risque

2- En augmentant par itération successive de 20% le pourcentage de l'actif A et en diminuant d'autant le pourcentage de l'actif B, déterminez la rentabilité et le risque du portefeuille, sachant que le budget est égal à 100.000 DH

3- Déterminez le portefeuille efficient

# Corrigé de la question 1

$$x = \frac{V(RB) - COV(RA, RB)}{V(RA) + V(RB) - 2COV(RA, RB)} = \frac{0{,}07 + 0{,}00448}{0{,}07 + 0{,}08 + 2 * 0{,}00448} = 0{,}4685$$

(1-x)= 1-0,4685)=0,5315. Il faut investir 46,85% dans l'actif A et 53,15% dans l'actif B pour minimiser le risque du portefeuille composé de ces deux actifs.

# Corrigé de la question 2

E(P) = [xE(RA)+(1-x)E(RB)]*Budget

V(P)= [$x^2$V(RA)+$(1-x)^2$V(RB)+2x(1-x)COV(RA,RB)]*Budget

E(RA) = 0,12 ; E(RB) = 0,1 ; V(RA) = 0,08 ; V(RB)= 0,07 ; COV (RA,RB)=-0,00448

| A x | B (1-x) | E(P) | V(P) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | [0*0,12+(1-0)*0,1]*100000=10000 | [$0^2$*0,08+$(1-0)^2$* 0,07+2*1*0* -0,00448]*100000=7000 |
| 0,2 | 0,8 | [0,2*0,12+(1-0,2)*0,1]*100000=10400 | [$0,2^2$*0,08+$0,8^2$* 0,07+2*0,2*0,8* -0,00448]*100000=4656,64 |
| 0,4 | 0,6 | [0,4*0,12+0,6*0,1]*100000=10800 | 3584,96 |
| 0,4685 | 0,5315 | [0,4685*0,12+0,5315*0,1]*100000=10937 | 3510,27 |
| 0,6 | 0,4 | [0,6*0,12+0,4*0,1]*100000=11200 | [$0,6^2$*0,08+$0,4^2$* 0,07+2*0,6*0,4* -0,00448]*100000=3784,96 |
| 0,8 | 0,2 | [0,8*0,12+0,2*0,1]*100000=11600 | 5256,64 |
| 1 | 0 | [1*0,12+0*0,1]*100000=12000 | [$1^2$*0,08+$0^2$* 0,07+2*1*0* -0,00448]*100000=8000 |

# Corrigé de la troisième question

| A | B | E(P) | V(P) |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 10000 | 7000 |
| 0,2 | 0,8 | 10400 | 4656,64 |
| 0,4 | 0,6 | 10800 | 3584,96 |
| 0,4685 | 0,5315 | 10937 | 3510,27 |
| 0,6 | 0,4 | 11200 | 3784,96 |
| 0,8 | 0,2 | 11600 | 5256,64 |
| 1 | 0 | 12000 | 8000 |

Portefeuille

Efficient

# Cas de plusieurs actifs financiers : détermination des proportions et du portefeuille efficient

## Espérance mathématique

$$E(P) = \sum_{i=1}^{n} xi.E(Ri)$$

Fonction Discrète

$$E(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} R.f(t).dt. \quad f(t)$$

Fonction Continue

## Variance

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} xi.xjcov(Ri, Rj)$$

Fonction Discrète

$$V(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} (R - E(R))^2 f(t).dt.$$

Fonction Continue

# Cas de plusieurs actifs financiers : détermination des proportions et du portefeuille efficient

Dans le cadre du portefeuille efficient, le gestionnaire du portefeuille peut s'intéresser singulièrement au cas qui permet de maximiser la différence entre espérance mathématique et variance. En introduisant le lagrangien, il s'agit de maximiser le programme suivant :

$Z = \sum_{i=1}^{n} x_i.E(R_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i.x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$.En dérivant successivement par rapport à $X_1, X_2, ..., X_n, \lambda$ et en annulant la dérivée, on obtient le système d'équations suivant exprimé sous forme matricielle : C*X=E

$$\begin{pmatrix} 2c_{11} & 2c_{12} & \dots & 2c_{1n} & 1 \\ 2c_{21} & 2c_{22} & \dots & 2c_{2n} & 1 \\ \dots & & \dots & & \\ 2c_{n1} & 2c_{n2} & \dots & 2c_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \\ E(R_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Alors, $X = C^{-1}.E$

**Cij : covariances entre les variables xij**

**E(Ri) : espérances mathématiques des rentabilités des actifs i**

**Xi : proportions à investir dans les actifs i**

Cas d'une distribution déterministe

$$\operatorname{Cov}(A,B) = \frac{\sum_{i}^{n}(A_i - \overline{A})(B_i - \overline{B})}{n}$$

<u>Cas d'une distribution probabiliste</u>

$$\operatorname{Cov}(A,B) = \sum_{i}^{n}(A_i - E(A))(B_i - E(B)) * p$$

# Démonstration de la formule qui maximise la différence entre rentabilité et risque (page précédente)

$\sum\sum x_i x_j cov(i,j) - \Lambda + \Lambda(x_1+x_2+\ldots x_n) = x_1E(R_1)+x_2E(R_2)+\ldots X_nE(R_n)$

$x_1x_1cov(1,1)+2x_1x_2cov(1,2)+\ldots 2x_1x_ncov(1,n)+$
$x_2x_2cov(2,2)+2x_2x_3cov(2,3)+\ldots 2x_2x_ncov(2,n)+\ldots$

$X_nx_ncov\ (n,n) - \Lambda + \Lambda\ (x_1+x_2+\ldots x_n) = x_1E(R_1)+x_2E(R_2)+\ldots X_nE(R_n)$

$\delta f(x)/\delta x_1 = 2x_1cov(1,1)+ 2x_2cov(1,1)+\ldots 2x_ncov(1,n)+\Lambda=E(R_1)$

$\delta f(x)/\delta x_2= 2x_1cov(2,1)+ 2x_2cov(2,2)+\ldots 2x_ncov(2,n)+\Lambda=E(R_2)$

$\delta f(x)/\delta x_n= 2x_1cov(n,1)+ 2x_2cov(n,2)+\ldots 2x_ncov(n,n)+\Lambda=E(R_n)$

$\delta f(x)/\delta\Lambda= -1+ x_1+x_2+\ldots x_n=0$

# Application

Les covariances entre trois actifs financiers A, B et C et leurs espérances mathématiques sont présentées dans le tableau ci-dessous :

| | Actif A | Actif B | Actif C | Espérance de rentabilité |
|---|---|---|---|---|
| Actif A | 10 | -0,5 | -0,6 | 20 |
| Actif B | -0,5 | 12 | -0,4 | 25 |
| Actif C | -0,6 | -0,4 | 14 | 15 |

**Questions :**

1-Posez l'équation matricielle qui permet de calculer les proportions à investir des les actifs financiers A, B et C de sorte à maximiser la différence entre leur rentabilité et risque

2- Calculez les proportions à investir des les actifs financiers A, B et C de sorte à maximiser la différence entre leur rentabilité et risque

# Corrigé de l'application: question 1

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -1 & -1{,}2 & 1 \\ -1 & 24 & -0{,}8 & 1 \\ -1{,}2 & -0{,}8 & 28 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Corrigé : Question 2

3. Calcul manuel

Il ya lieu de résoudre le système d'équation suivant :

$$\text{Système1}\quad \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{array} \begin{cases} 20x1 - x2 - 1{,}2x3 + \lambda = 20 \\ -x1 + 24x2 - 0{,}8x3 + \lambda = 25 \\ -1{,}2x1 - 0{,}8x2 + 28x3 + \lambda = 15 \\ x1 + x2 + x3 = 1 \end{cases}$$

Faisons les opérations suivantes : (L1-L2) ; (L2-L3) et laissons L4 telle qu'elle est. Nous obtenons alors le système suivant :

$$\text{Système2}\quad \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \begin{cases} 21x1 - 25x2 - 0{,}4x3 = -5 \\ 0{,}2x1 + 24{,}8x2 - 28{,}8x3 = 10 \\ x1 + x2 + x3 = 1 \end{cases}$$

Faisons les opérations suivantes : (-72L1 + L2) et (L2 + 28,8L3). Nous obtenons alors le système suivant :

$$\text{Système3}\quad \begin{array}{l} L1 \\ L2 \end{array} \begin{cases} -1511{,}8x1 + 1824{,}8x2 = 370 \\ 29x1 + 53{,}6x2 = 38{,}8 \end{cases}$$

En arrondissant les résultats à trois chiffres après la virgule, nous aurons x1= 0,381 ; x2= 0,518 ; x3= 0101.

Pour maximiser la différence entre l'espérance de rentabilité et le risque du portefeuille, l'entreprise doit investir 38,1% dans l'actif A, 51,8% dans l'actif B et 10,1% dans l'actif C.

N.B. : Il est possible, si besoin est, de calculer $\lambda$ en remplaçant x1, x2 et x3 par leurs valeurs dans le système 1.

# Corrigé détaillé

$$L1 = 20x1 - x2 - 1{,}2x3 + \lambda \quad = 20$$

$-$

$$L2 = -x1 + 24x2 - 0{,}8x3 + \lambda = 25$$

$$= 21x1 - 25x2 - 0{,}4x3 \quad = -5$$

$$L2 = -x1 + 24x2 - 0{,}8x3 + \lambda = \quad 25$$

$-$

$$L3 = -1{,}2x1 - 0{,}8x2 + 28x3 + \lambda = 15$$

$$= \quad 0{,}2x1 + 24{,}8x2 - 28{,}8x3 = 10$$

L4 = x1+x2+x3=1 (elle est inchangée); le nouveau système devient:

$$L1 = 21x1 - 25x2 - 0{,}4x3 = -5$$

$$L2 = 0{,}2x1 + 24{,}8x2 - 28{,}8x3 = 10$$

$$L3 = x1 + x2 + x3 \quad = 1$$

# Corrigé détaillé

$-72L1 = -1512x1+1800x2+28,8x3=360$

$+$

$L2 = \quad 0.2x1+24,8x2-28,8x3 =10$

---

$= \quad -1511,8x1+1824,8x2 =370$

$L2 = \quad 0.2x1+24,8x2-28,8x3 =10$

$+$

$28,8L3 = 28,8x1+28,8x2+28,8x3 = 28.8$

---

$= \quad 29x1+53,6x2= 38,8$

Le nouveau système devient :

$L1 = \ -1511,8x1+1824,8x2 =370$

$L2 = \ 29x1+53,6x2= 38,8$

# Corrigé détaillé

-1511,8x1+1824,8x2=370

29x1+53,6x2=38,8

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1511{,}8 & 1824{,}8 \\ 29 & 53{,}6 \end{vmatrix} = -133951{,}68; \quad \Delta x1 = \begin{vmatrix} 370 & 1824{,}8 \\ 38{,}8 & 53{,}6 \end{vmatrix} = -50970{,}24$$

$$Ax2 = \begin{vmatrix} -1511{,}8 & 370 \\ 29 & 38{,}8 \end{vmatrix} = -69387{,}84; \quad x1 = \Delta x1/\Delta = 0{,}381;$$

X2= Δx2/Δ = 0,518; x3=1-(0,381+0,518)=0,101

# Modèle d'équilibre des actifs financiers

E(Ri) = RF+[E(RM)-RF]*β

E(Ri) : taux exigé par le marché

RF : taux de rentabilité d'un actif sans risque (placement dans une banque par exemple)

E(RM) : espérance mathématique de la rentabilité du marché

RI: rentabilité d'un actif I dans lequel on investit

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(RI, RM)}{\mathrm{Var}(RM)} :$$

<u>Cas d'un univers probabiliste</u>

$$\beta = \frac{\sum (RI - E(RI))(RM - E(RM)) * p}{\sum (RM - E(RM))^2 * p}$$

<u>Cas d'un univers déterministe</u>

$$= \frac{\sum (RI - \overline{RI})(RM - \overline{RM})}{\sum (RM - \overline{RM})^2}$$

β exprime la volatilité de l'actif financier dans lequel on investit. Si β<1, l'actif financier est stable, dans le cas contraire il est instable

# Modèle d’équilibre des actifs financiers :TD

Une entreprise envisage un projet A dont le taux de rentabilité varie en fonction des conditions économiques générales. Ces conditions, la probabilité de leur réalisation, le taux de rentabilité du marché et le taux de rentabilité du projet sont consignés dans le tableau suivant :

| Conditions économiques | Probabilité | RM | RI |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,2 | 0,3 | 0 |
| 2 | 0,3 | 0,2 | 0,45 |
| 3 | 0,3 | 0 | 0,20 |
| 4 | 0,2 | -0,1 | -0,45 |

**Questions**

1- Déterminez l’équation du MEDAF sachant que le rendement des actifs sans risque est de 8%

# Solution

- Calcul de l'espérance mathématique de rentabilité du projet I : E(RI)

| Conditions du marché | Probabilité (p) | Rentabilité (RI) | P*R |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 ,2 | 0 | 0 |
| 2 | 0,3 | 0,45 | 0 ,135 |
| 3 | 0,3 | 0,20 | 0,06 |
| 4 | 0,2 | -0,45 | 0,09 |
| E(RI) | | | 0,105 = 10,5% |

- Calcul de l'espérance mathématique de rentabilité du marché: E(RM)

| Conditions du marché | Probabilité (p) | Rentabilité (RM) | P*R |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 ,2 | 0,3 | 0,06 |
| 2 | 0,3 | 0,2 | 0,06 |
| 3 | 0,3 | 0 | 0 |
| 4 | 0,2 | -0,1 | -0,02 |
| E(RI) | | | 0,1 = 10,% |

# Solution

- Calcul de β

| Conditions du marché | Probabilité (p) | RI-E(RI) (a) | RM-E(RM) (b) | (a)*(b)*(p) | $(b)^2$ *(p) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 ,2 | -0,105 | 0,2 | -0,0042 | 0,008 |
| 2 | 0,3 | 0,345 | 0,1 | 0,01035 | 0,003 |
| 3 | 0,3 | 0,095 | -0,1 | -0,00285 | 0,003 |
| 4 | 0,2 | -0,555 | -0,2 | 0,0222 | 0,008 |
| Total | | | | 0,0255 | 0,022 |

$$\beta = \frac{Cov(RI,RM)}{Var(RM)} = \frac{0,0255}{0.022} = 1,16$$

1. Equation du MEDAF

E(Ri) = 0,08 + [0,1-0,08]*1,16 =0,1032 = 10,32%

2. Appréciation de la rentabilité du projet I

La rentabilité du projet I (10,5%) est supérieure à la rentabilité requise par le marché (10,32%) ; Il est donc rentable selon le critère du MEDAF.

# Arbitrage Pricing Theory : APT

Calcul de la rentabilité

Rentabilité d'un actif financier I

$RI = \alpha+\beta 1F1+ \beta 2F2+\ldots\ldots \beta nFn+\varepsilon$

Espérance mathématique de RI : équation de l'APT

$E(RI) = \alpha+\beta 1*E(F1)+ \beta 2*E(F2)+\ldots\ldots \beta n*E(Fn)$

Calcul des proportions à investir dans les actifs financiers

$$\begin{cases} E(\beta ij)=\Sigma xi\beta j \\ \Sigma xi = 1 \end{cases}$$

Bij : coefficients de volatilité fixés par l'investisseur

# TD

Une analyse des rendements sur la bourse des valeurs montre une influence prépondérante de deux facteurs : l'inflation et l'évolution (F1) du prix du pétrole (F2). Dans ce contexte, les caractéristiques de trois types d'actifs financiers A, B et C et les $\beta$ liés aux deux facteurs précités se récapitulent dans la tableau suivant :

| Actifs financiers | Espérance mathématique | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|
| A | 11,125 | 1 | 0,5 |
| B | 10,5 | 0,5 | 1 |
| C | 8 | 0,3 | 0,6 |

**Questions**

1- Déterminez l'équation de l'APT

2- Déterminez les proportions de A, B et C dans le cas où $E(\beta_1) = 0,7$ et $E(\beta_2) = 0,65$

# Corrigé

Equation de l'APT

$E(RI) = = \alpha+\beta 1*E(F1)+ \beta 2*E(F2)$

$$\begin{cases} \text{L1 : } \alpha + E(F1)+0{,}5E(F2)=11{,}125 \\ \text{L2 : } \alpha + 0{,}5E(F1)+E(F2)=10{,}5 \\ \text{L3 : } \alpha +0{,}3E(F1)+0{,}6E(f2)=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{L1-L2: } 0{,}5E(F1)-0{,}5E(F2)=0{,}625 \\ \text{L2-L3: } 0{,}2E(F1)+0{,}4E(F2)=2{,}5 \end{cases}$$

Résultats

$E(F1)=5$; $E(F2)=3{,}75$; $\alpha =4{,}25$

Equation de l'APT : $E(RI) = 4\ {,}25+5\ \beta 1+ 3{,}75\ \beta 2$

# Corrigé

Soient x1, x2 et x3 ces proportions, nous aurons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E(\beta_i) = \sum x_i \beta_i \\ \sum x_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1*x1+0,5*x2+0,3*x3 = 0,7 \\ 0,5*x1+1*x2+0,6*x3 = 0,65 \\ x1+x2+x3 = 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne les résultats suivants : x1 = 0,5 ; x2 =0,25 ; x3 = 0,25.