Optimisation du coût du stock de sécurité

1-Cas d’une fonction discrète

A- Le coût s’applique uniquement au nombre de ruptures

B- Le coût s’applique aux demandes non satisfaite

2-Cas d’une fonction continue

Le coût s’applique uniquement au nombre de ruptures

Dans ce cas, le raisonnement marginal est employé. Il faut alors calculer le coût d’une unité en plus et d’une unité en moins par rapport à SS, soit :

Le coût du SS = $C(SS)= CS*SS+CR*P(D_t>SR)*\frac{DA}{SA}$; DA= demande annuelle ; SA ; stock actif ; SR =stock de réapprovisionnement ; CR= coût de rupture

<u>Le coût d’une unité en plus</u>

$$C(SS+1)= CS*(SS+1)+CR*P(D_t>SR+1)*\frac{DA}{SA} = CS*SS+CS+P(D_t>SR+1)*\frac{DA}{SA}$$

$$C(SS)= CS*SS+CR*P(D_t>SR)*\frac{DA}{SA}$$

$$C(SS+1)-C(SS)= CS-CR*P(D_t=SR+1)*\frac{DA}{SA} \geq 0 \Rightarrow -CR*P(D_t=SR+1)*\frac{DA}{SA} \geq -CS$$

$$\Rightarrow CR*P(D_t=SR+1)*\frac{DA}{SA} \leq CS \Rightarrow P(D_t=SR+1) \leq \frac{CS}{CR}*\frac{SA}{DA}$$

<u>Le coût d’une unité en moins</u>

$$C(SS)= CS*SS+P(D_t>SR)*\frac{DA}{SA}$$

$$C(SS-1)=CS*SS-CS+P(D_t>SR-1)*\frac{DA}{SA}$$

$$C(SS)-C(SS-1)= CS-CR*P(Dt=SR)*\frac{DA}{SA} \leq 0 \Rightarrow -CR*P(Dt=SR)*\frac{DA}{SA} \leq -CS \Rightarrow CR*P(Dt=SR)*\frac{DA}{SA} \geq CS$$

$$\Rightarrow P(Dt=SR) \geq \frac{CS}{CR}*\frac{SA}{DA}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(D_t=SR+1) \leq \frac{CS}{CR}*\frac{SA}{DA} \leq P(Dt=SR)}$$

Le coût s'applique uniquement au nombre de ruptures: exemple pour comprendre la formule à la page précédente

SR	Probabilité
0	0,2
1	0,5
2	0,3

Coût d'une unite en plus

P(SR>0)=0,5+0,3=0,8; P(SR>1)=0,3

P(SR>1)-P(SR>0)=-P(SR=1)

P(Dt>0+1)-P(Dt>0)=-P(Dt=0+1)

P(Dt>SR+1)-P(Dt>SR)=-P(Dt=SR+1)

Coût d'une unite en moins

P(SR>0)=P(SR>1)+P(SR=1)

P(SR>0)=P(SR>1)+P(SR=1)

Le coût s’applique aux demandes non satisfaite

Un raisonnement marginal, similaire à celui développé dans le cas où le coût de rupture s’applique uniquement au nombre de ruptures, permet de dire que SR et SS sont optimaux si la condition suivante est remplie : $P\ \{D_t > SR\} \leq \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA} \leq \{D_r \geq SR\}$.

Application

. Une société achète des produits par série de 5000 unités pour satisfaire une demande annuelle de 20000 unités, correspondant à un nombre de jours ouvrables de 250 jours. Le coût de détention d'une unité achetée pendant l'année s'élève à 4 dh. Par ailleurs, le délai d'approvisionnement est une variable aléatoire suivant une loi de poisson dont la moyenne et la variance ont une valeur de 0,5 jours.

Question : Déterminez SR et SS

1- Dans le cas où le coût de rupture est indépendant du volume des demandes non satisfaites et s'élève à 2500 dh

2- Dans le cas où le coût de rupture est lié au volume des demandes non satisfaites et le coût par unité de demande non satisfaire s'élève à 50 dh

Préalable aux questions

Données : DA =20000 unités ; SA =5000 unités ; CS=4 DH ; période d'approvisionnement =250 jours ;

I est une variable aléatoire de moyenne, m=0,5 suivant une loi de poisson P(x=k)=

$$e^{-m} * \frac{m^k}{k!}$$

d= $\frac{20000}{250}$ =80 unités ; E(I)=0.5 ; E(Dt) = d* E(I) = 80*0,5=40 unités.

Exemples

P(k=0)= $e^{-0,5} * \frac{0,5^0}{k0} = 0,606531$

P(k=1)= $e^{-0,5} * \frac{0,5^1}{1!} = 0,303265$

Corrigé de la question 1

L'optimum est atteint lorsque P (Dt=SR+1) $\leq \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA} \leq$ P (Dt=SR) ; $\frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA} = \frac{4}{2500} * \frac{5000}{20000}$

=0,0004

Nombre de jours de retard de l	SR	P(Dt=SR)	P(Dt=SR+1)
0	0	0,606531	0,303265
1	80	0,303265	0,075816
2	160	0,075816	0,012636
3	240	0,012636	0,001580
<u>4</u>	<u>320</u>	<u>0,001580</u>	<u>0,000158</u>
5	400	0,000158	0,000000

SR est donc égal à 320 ;

SS = SR –E(Dt) = 320-40 =280 unités.

Corrigé de la question 2

L'optimum est atteint lorsque $P(Dt>SR) \leq \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA} \leq P(Dt \geq SR)$; $\frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA} = \frac{4}{50} * \frac{5000}{20000} = 0{,}02$

Nombre de jours de retard de l	SR	P(Dt=SR)	P(Dt>SR)	p(Dt≥SR)
0	0	0,606531	0,393469	1,000000
1	80	0,303265	0,090204	0,393469
2	160	0,075816	0,014388	0,090204
3	240	0,012636	0,001752	0,014388
4	320	0,001580	0,000172	0,001752
5	400	0,000158	0,000014	0,000172

SR est alors égal à 160 ;

SS = SR – E(Dt) = 160-40 =120 unités.

Cas d’une variable continue

Dans ce cas, le coût relatif au stock de sécurite noté CSS s’écrit :

$CSS = CS*SS+CR*\ P\{D_t>SR\}*\ \frac{DA}{SA}$ (ce rapport désigne le nombre de ruptures). Si nous utilisons, à ce niveau, une loi normale centrée réduite, nous pourrons remplacer $P\{D_t>SR\}$ par $1-\ P\{D_t<SR\}$, soit $F_0(-SR)$. Ainsi, nous aurons $CSS = CS*SS+CR*\ F_0\ (-SR)\ *\frac{DA}{SA}$. En remplaçant SS par sa valeur, soit $SR-\ E\ (D_t)$, l’expression du coût devient :

$CSS = CS*(SR-\ E\ (D_t)) + CR*\ F_0\ (-SR)\ *\frac{DA}{SA}$. En dérivant par rapport à SR, nous obtenons l’expression suivante : $CS - CR*f\ (SR)*\frac{DA}{SA}$. En égalant la dérivée à zéro, nous aurons :

$f\ (SR) = \frac{CS}{CR}*\frac{SA}{DA}$. f (SR) représente la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

Application

Le délai d'approvisionnement dans une entreprise est de 7 jours. La demande par jour suit une loi normale dont la moyenne et l'écart-type sont respectivement de 10 tonnes et de 7,5 tonnes. Le coût de détention d'une tonne pendant un an est de 51 dh et le coût d'une rupture des stocks s'évalue à 400 dh. La demande annuelle moyenne est estimée à 2500 tonnes et le niveau de stock actif à 500 tonnes.

Questions

1- Déterminez SR et SS de telle sorte que le coût du stock de sécurité soit minimisé

2- Déterminez le coût du stock de sécurité optimum

Corrigé

Données : CS=51DH, CR=400 DH, DA=2500 ; SA=500 ; E(d)=10 unités; σ(d)=7.5 unités ; délai d'approvisionnement= 7 jours ; période d'approvisionnement = 1 an

1. **Calcul de SR et SS**

E(Dt)=l*E(d) = 7*10 = 70 unités ;

V(Dt) = l*V(d)=7*7,5² =393,75 (indépendance des d dans le temps).

σ (Dt) = $\sqrt{393,75}$ =19,84 ;

Le coût de SS est minimisé lorsque f(SR) = $\frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA} = \frac{51}{400} * \frac{500}{2500}$ =0,0255

f(SR) = $P(Dt = \frac{SR - E(Dt)}{\sigma(Dt)}) = P(Dt = \frac{SR - 70}{19,84})$=0,0255 ? $\frac{SR - 70}{19,84} = \sqrt{-2Ln(0,0255 * \sqrt{2 * \pi})}$ = 2,345

$\frac{SR - 70}{19,84} = 2,345$

? SR = 116,52 ;

? SS= SR-E(Dt) = 116,52-70 = 46,52.

Egalement : SS = 19,84*2,345 = = 46,52.

2. **Coût de SS**

CSS= CS*SS+CR*[1-F(SR)]* $\frac{DA}{SA}$ = 51*46,52+400*[1-F(2,345)]* $\frac{2500}{500}$ =51*46,52+400*[1-0,9905]* $\frac{2500}{500}$ =2391,52.

Table statistique Z $\rightarrow$ α (α=seuil d'erreur)

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861