Université Mohammed 1er
E.S.T.O.

El Kadiri Boutchich Driss
2. G. L.T

GESTION DES STOCKS ET APPROVISIONNEMENTS

Année universitaire 2021-2022

Introduction : Gestion des stocks et des achats

Bien qu'il y ait de nombreuses interférences entre gestion des stocks et achats, les deux sont différenciés par le fait que la gestion des stocks est à dominante interne (se focalise sur le coût et la relation avec les acteurs internes) et managériale alors que la gestion des achats est à dominante externe (se focalise sur le prix et la relation avec les partenaires externes) et procédurale.

1. Gestion des stocks

1.1. Définition et historique

La gestion des stocks regroupe les activités d'achat et de stockage et se propose d'établir les références à tenir en magasin, de déterminer les quantités associées à ces références et de fixer les modes et les échéances de réapprovisionnement en respectant les conditions de coût, de délai et de qualité.

La gestion des stocks sous sa forme la plus rudimentaire aurait dû exister depuis que le monde est monde. Elle n'est même pas propre à l'homme, du moment qu'elle est câblée dans l'instinct animal. En tant qu'état d'esprit, la gestion des stocks incombe aux premiers cueilleurs ou agriculteurs qui ont dû constituer des stocks pour survivre d'une saison à l'autre. Sous sa forme socialisée, la gestion des stocks aurait dû exister depuis le premier âge, au moment où les chefs de tribus ou les rois cherchaient à assurer à leurs protégés vivres et munitions pour une période assez longue notamment en cas de guerre et de famine. Cependant, la gestion des stocks ne s'est institutionnalisée qu'au 17ème siècle avec la généralisation des systèmes de magasins et le développement de la fonction d'intendance dans l'administration et particulièrement dans le domaine militaire. Sur le plan entrepreneurial, la gestion des stocks n'a connu son départ effectif qu'à partir des modifications organisationnelles du système de production, via le passage du système externalisé de putting out au système de factory au 19ème siècle. La gestion des stocks ne prendra sa forme canonique que dans le 20ème siècle avec d'abord la formule de la quantité économique développée par Harris en 1915 dans Westinghouse et peaufinée par Wilson en 1934. Aussi, les modèles de gestion des stocks furent développés avec le développement de la recherche opérationnelle et de l'informatique dans l'après seconde guerre mondiale. La gestion des stocks s'est affinée avec l'affinement des techniques de production, en l'occurrence le MRP, l'OPT, le FMS et le JIT, à partir des années 60. L'apport du JIT et son originel, la qualité totale réside dans la prise en considération aussi bien des stocks matériels que des stocks immatériels.

Les tendances actuelles de la gestion des stocks sont intégrativité et transnationalité. Ces tendances sont étayées par le développement de l'approche réactive dans le domaine des systèmes d'informations (ERP, CRM, Supply Chain, E-Business…).

En plus des sources précitées, l'évolution de la gestion des stocks puise ses fondements notamment dans la comptabilité et la finance. Au niveau de la comptabilité financière, les stocks se caractérisent par la patrimonialité (les stocks sont la propriété de l'entreprise), la circularité (les stocks sont liés au cycle d'exploitation alors que les éléments longitudinaux sont considérés comme des immobilisations à l'instar des emballages identifiables) et la normativité (l'inventaire des stocks doit être établi au moins une fois par an). La comptabilité de gestion a permis le peaufinage de l'évaluation des stocks à travers les types de méthodes d'évaluation des coûts (coût moyen pondéré, FIFO, LIFO, coût de remplacement et backflushing) et les types de coût (complet, variable, rationnel, basé sur les activités…). La comptabilité de gestion a permis également de réintroduire l'analyse par les flux et les processus dans la gestion des stocks (analyse des flux-stocks matériels et immatériels et passage du Work In Process au Raw In process). La finance, enfin, traite la gestion des stocks à travers la gestion du besoin en fonds de roulement nécessité par le décalage entre les encaissements et les produits d'une part et les décaissements et les charges d'autre part.

1.2. Typologies des stocks

Il est possible de dégager les types de stocks suivants :

- Stock minimum : c'est le stock qui doit être maintenu pour faire face à la consommation compte tenu du délai d'approvisionnement, dans l'hypothèse de régularité de la demande.
- Stock actif : c'est la quantité des biens qui entre en stock à chaque livraison et qui est consommée. Cette quantité est appelée également quantité économique.
- Stock moyen : c'est la moyenne du stock actif au long de sa consommation. Généralement et dans un souci de simplification, le stock moyen s'obtient en intégrant les extrémités du stock actif (la quantité économique et 0 en principe) dans la moyenne.
- Stock de sécurité : c'est un stock devant être constitué au-delà du stock minimum pour faire face à la fluctuation de la consommation (accélération) et du délai de livraison (retard).
- Stock de réapprovisionnement : c'est le niveau de stock qui entraîne le déclenchement de la commande. Il inclut le stock de sécurité constitué.

1.3. Organisation de la gestion des stocks

L'organisation de la gestion des stocks peut être différenciée selon plusieurs critères :

- Critère de rattachement hiérarchique : la fonction "gestion des stocks" peut être centralisée ou décentralisée, liée à l'entité gestion de production ou à d'autres entités ;
- Critère du principe de gestion des flux : les flux peuvent être poussés par l'amont (anticiper la demande des composants à partir d'une programmation prévisionnelle de la production en privilégiant la disponibilité des matières liées notamment à la saisonnalité de leur production..) ou tirés par l'aval (organiser les fonctions de l'entreprise de telle sorte à avoir un stock nul ou presque. Autrement dit, produire juste ce dont l'entreprise a besoin pour vendre et acheter juste ce dont elle a besoin pour produire) ;
- Critère de nature des flux à gérer : les flux peuvent être matériels (matières, produits…) ou immatériels (nombre d'ordres de productions, nombre de commandes, nombre de dossiers traités…) ;
- Critère instrumental : trois types d'instruments de gestion des stocks peuvent être utilisés : le just in time, la gestion calendaire et la gestion à point de commande. Le just in time se propose de faire tendre vers zéro les stocks matériels et immatériels à travers notamment la technique du KANBAN (étiquette en japonais). Le nombre de KANBANS de production et de transfert doit être minimisé, ce qui dénote une rapidité dans l'exécution des tâches. La gestion calendaire consiste à lancer des ordres d'approvisionnement à des intervalles réguliers. Elle se propose de minimiser le coût de gestion comprenant le coût de stockage et le coût de pénurie. Quant à la technique de la gestion à point de commande, elle cherche à déterminer le niveau à partir duquel l'entreprise doit passer une commande tout en minimisant les coûts de stockage et de rupture éventuelle des stocks.
- Nature d'informatisation : la gestion des stocks peut faire l'objet d'une informatisation localisée, partagée à travers un système de gestion de base de données ou intégrée faisant appel à des ERP (enterprise resource planning) ou progiciels de gestion intégrée.

1.4. Modèles de gestion des stocks

Les modèles de gestion des stocks sont différenciés selon les critères ci-après :

- Univers de l'entreprise : ce critère distingue entre les modèles déterministes appliqués dans un univers certain ou stable et les modèles probabilistes appliqués dans un univers aléatoire.
- Problématique de la gestion des stocks : les modèles de gestion calendaire doivent être adoptés dans le cas où l'enjeu de rupture de stocks est grand. Dans le cas contraire, les modèles de gestion à point de commande peuvent être appliqués.
- Résultat recherché : ce critère permet de différencier les modèles d'optimisation qui quêtent le résultat optimal et les modèles heuristiques qui cherchent le résultat satisfaisant (modèles de simulation).
- Variables entrant dans le modèle : les modèles sont différenciés selon qu'ils portent sur des variables discrètes ou des variables continues.

2. Gestion des achats

Trois aspects de la gestion des achats sont traités : évolution de la fonction des achats, structure de la fonction des achats et processus d'achat.

2.1. Évolution de la fonction des achats

Trois phases fondamentales ont marqué l'évolution de la fonction des achats au sein des entreprises et des organisations : économie de l'offre, économie de la demande et économie cybernétique.

2.1.1. Économie de l'offre

Cette situation prévalait au milieu du 20ème siècle où l'offre était insuffisante tangiblement par rapport à la demande. Face à cette situation, la priorité de la fonction des achats est de trouver des fournisseurs en mesure de livrer les quantités nécessaires pour satisfaire les besoins de la production.

2.1.2. Economie de la demande

A partir des années 70, l'intensification de la concurrence entraîne une pression sur les prix qui se répercute en amont. Désormais, l'entreprise doit acheter au moindre coût, ce qui l'oblige à négocier les prix de façon plus efficace. A partir des années 80, l'accentuation de la concurrence avec la globalisation conduit l'entreprise à prendre en considération l'ensemble de la chaîne de valeur pour être compétitive. Cela amène l'entreprise à rechercher, en plus du prix le moins disant, la qualité et le délai appropriés.

A cette époque, se développent avec les fournisseurs de nouvelles relations basées sur le partenariat, ce qui nécessite la réduction du nombre de fournisseurs, leur responsabilisation et leur implication dans des champs plus larges de la gestion de l'entreprise.

2.1.3. Economie cybernétique

Cette ère se caractérise par le développement de plateformes électroniques. Cela se manifeste par la mise en place des réseaux de type extranet et l'effectuation de transactions électroniques interentreprises par internet (E-Business, Business to Business).

2.2. Structure de la fonction des achats

La structure de la fonction des achats est différenciée selon deux critères : critère d'annexion et critère de configuration organisationnelles.

2.2.1. Critère d'annexion organisationnelle

Généralement la fonction des achats est rattachée à la fonction de production et lui est subordonnée. Cependant, la prise en compte de l'aspect stratégique des achats peut conduire à placer la fonction des achats au même niveau que les grandes fonctions de l'entreprise et l'annexer directement à la direction générale.

2.2.2. Critère de configuration organisationnelle

La configuration organisationnelle de la fonction des achats oscille entre la centralisation et la décentralisation. La configuration centralisée est moins coûteuse, augmente le pouvoir de négociation vis-à-vis des fournisseurs et favorise le développement des compétences du personnel. La configuration décentralisée facilite le rapprochement avec les opérationnels et l'intervention technique des utilisateurs et des prescripteurs dans le processus d'achat. Elle permet ainsi la flexibilité, la réactivité et la proximité du lieu de la prise de décision.

2.3. Processus d'achat

Le processus d'achat se déroule en cinq étapes : expression des besoins, recherche et sélection des fournisseurs, négociation et passation de la commande, réception des achats et gestion des commandes- fournisseurs.

2.3.1. Expression des besoins

Exprimé par l'utilisateur ou le prescripteur, le besoin d'achat prend souvent la forme d'un cahier de charges distingué en deux types : cahier de charges technique et cahier de charges fonctionnel. Le cahier de charges technique décrit toutes les caractéristiques du produit ou du service (spécifications techniques, niveaux de performances, fiabilité, durée, modèles). Quant au cahier de charges fonctionnel, il décrit le besoin sous forme de fonctions à réaliser avec des contraintes de qualité, laissant ainsi une marge de manœuvre au fournisseur au niveau de la conception du

produit ou du service. Quelle que soit la forme du cahier de charges, celui-ci comporte, en plus des conditions techniques ou fonctionnelles, des conditions de qualité afférentes aux achats.

2.3.2. Recherche et sélection des fournisseurs

La recherche de nouveaux fournisseurs s'effectue par le recours à des moyens traditionnels (publipostage, salons, annuaires, organismes professionnels, annonces…) ou des moyens informatiques accessibles par internet. L'homologation d'un fournisseur est précédée d'une étude détaillée le concernant et portant sur les indicateurs suivants : indicateurs commerciaux (chiffre d'affaires, part de marché, gamme de produits..), indicateurs techniques (potentiel de production sur le plan quantitatif et qualitatif), indicateurs de rentabilité financière (capacité d'autofinancement, EBE, ETE…), indicateurs informationnels (architecture informationnelle, capacité cybernétique, sites internet, EDI…) et indicateurs de performance globale (démarche-qualité, recherche et développement, ressources humaines…).

La sélection des fournisseurs se fait à partir de la liste des nouveaux fournisseurs et des fournisseurs coutumiers et se base sur une analyse multicritères qui comporte notamment les critères suivants : degré de réponse des fournisseurs aux exigences du cahier de charges, le prix, le délai de livraison, les conditions de paiement, les conditions de garanties, les services après ventes (assistance, maintenance…) et la situation géographique des fournisseurs (niveau de proximité du fournisseur par rapport à l'entreprise). Les différentes évaluations sont regroupées dans une note globale, compte tenu de la pondération des différents critères.

2.3.3. Négociation et passation de la commande

Le pouvoir de négociation de l'entreprise avec ses fournisseurs dépend de son importance à l'égard de ces derniers et de leur nombre.

La passation de la commande peut prendre l'une des trois formes suivantes :

- Bon de commandes qui porte sur un produit ou un service déterminé avec engagement ferme et définitif de prix, de quantité et de délai ;
- Marché qui porte sur un produit ou un service avec engagement ferme et définitif sur le prix et la quantité globale à livrer ; Les délais sont échelonnés selon les termes du contrat avec possibilités d'ajustement ;
- Commande ouverte qui porte sur un produit ou un service avec engagement ferme et définitif sur le prix correspondant à une quantité donnée ; Les livraisons se font au fur et à mesure des besoins de l'entreprise acheteuse.

2.3.4. Réception des achats

La réception des achats permet la maîtrise des entrées en stock, le contrôle de la qualité des produits réceptionnés et la gestion du transit. La maîtrise des entrées est réalisée à travers la gestion des lots et le suivi de la provenance afin de garantir la traçabilité des produits achetés. Le contrôle de qualité se propose de vérifier l'authenticité des spécifications requises au niveau des produits achetés et les conditions d'acheminement de ces derniers. Quant enfin à la gestion du transit, elle permet de suivre de manière plus précise les délais d'approvisionnent.

2.3.5. Gestion des commandes- fournisseurs

Elle consiste à structurer toutes les données relatives aux fournisseurs et aux conditions habituelles définies avec eux de telle sorte que les saisies soient fluides.

La gestion des commandes- fournisseurs nécessite l'élaboration d'une base de données sur les fournisseurs (adresses ; interlocuteurs, délais d'acheminement…) et se propose l'établissement des éléments suivants :

- Commandes- fournisseurs : demande d'achat, cadencement des achats et imputations comptables ;
- Suivi du carnet des commandes- fournisseurs : suivi des réceptions et des factures, gestion des relances préventives et curatives des commandes…;
- Statistiques des achats : palmarès des fournisseurs et classement des fournisseurs d'après les exigences de l'entreprise en termes de coût, de délai et de qualité. Ce classement est souvent effectué selon la méthode ABC en prenant en considération le couple articles/fournisseurs.

Modèles déterministes de gestion des stocks

1. Cas d'une demande constante sans coût de pénurie

Dans ce cas, nous utilisons la formule de Wilson pure. Soient :
- D : demande ou consommation pendant une période donnée λ
- CL : coût de passation d'une commande
- CS : coût unitaire de stockage
- Q: quantité optimale à commander
- N : nombre de commandes $= \frac{D}{Q}$

CT : coût total d'approvisionnement
T : rythme d'approvisionnement
Nous nous intéressons au calcul de trois grandeurs : quantité économique, rythme d'approvisionnement et coût optimal d'approvisionnement.

1.1. Quantité économique

Le coût total se présente comme suit : $CT = CL * \frac{D}{Q} + CS * \frac{Q}{2}$. En dérivant par rapport à Q et en annulant le résultat, nous obtenons $Q = \sqrt{\frac{2 * CL * D}{CS}}$

1.2. Rythme d'approvisionnement

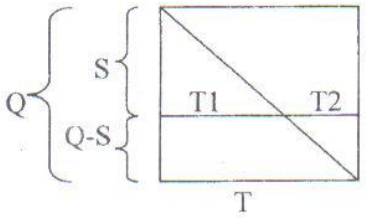
Le rythme d'approvisionnement $T = \frac{\lambda}{\frac{D}{Q}}$. Si λ = 1(une année par exemple), $T = \frac{1}{\frac{D}{Q}} = \frac{Q}{D}$

1.3. Coût optimal d'approvisionnement

En remplaçant dans la fonction de coût total Q par $\sqrt{\frac{2 * CL * D}{CS}}$, nous obtenons la formule du coût optimal suivante : $CT^* = \sqrt{2 * CL * CS * D}$

2- Cas d'une demande constante avec coût de pénurie

Dans ce cas, nous admettons une pénurie et nous lui affectons un coût CP par unité de temps. A la fin de chaque temps, il est lancé une commande destinée à satisfaire la demande différée de (Q-S) et de reconstituer le stock S.
Le modèle mathématique de la gestion des stocks sera modifié et sa représentation graphique sera la suivante :



T : période séparant deux approvisionnements ;
T1 : période de T où le stock est suffisant pour faire face à la demande ;
T2 : période de T où il y a pénurie de (Q-S) et la demande est différée sur la prochaine commande.

En lisant la figure ci-dessous et par référence aux propriétés des triangles homothétiques, il est possible d'écrire les égalités suivantes : $\frac{T1}{T}=\frac{S}{Q}$ et $\frac{T2}{T}=\frac{Q-S}{Q}$. A partir de ces équations, il est réalisable de dégager les valeurs de T1 et de T2. Ainsi, $T1=\frac{T*S}{Q}$ et $T2=\frac{T(Q-S)}{Q}$

Ces relations nous permettent de calculer les coûts des composants d'une commande :

- Coût moyen de stockage $=\frac{S}{2}*T1*CS$
- Coût moyen de pénurie $=\frac{(Q-S)}{2}*T2*CP$
- Coût moyen du lancement d'une commande = CL

Pour déterminer le coût moyen total, il faut multiplier la somme des coûts moyens par le nombre de commandes, soit $\frac{D}{Q}$ ou $\frac{1}{T}$ .Ainsi, le coût moyen total se présente comme suit :

Coût moyen total $=(\frac{S}{2}*T1*CS+\frac{(Q-S)}{2}*T2*CP+CL)*\frac{1}{T}$. En remplaçant T1 et T2 par leurs valeurs, nous aurons Coût moyen total $=(\frac{S^2*T}{2Q}*CS+\frac{T(Q-S)^2}{2Q}*CP+CL)*\frac{1}{T}$

$=(\frac{S^2}{2Q}*CS+\frac{(Q^2+S^2-2SQ)}{2Q}*CP+\frac{CL}{T})$

Nous nous intéressons ici au calcul de quatre grandeurs : stock de service, quantité économique, rythme d'approvisionnement et coût moyen total d'approvisionnement

2.1. Stock de service

En dérivant par rapport à S et en annulant la dérivée, nous aurons $S=Q*\frac{CP}{CS+CP}$.

Il est alors possible d'écrire : $\frac{S}{Q}=\frac{CP}{CS+CP}$; $\frac{CP}{CS+CP}$ gagne à être appelé taux de service.

2.2. Quantité économique

En dérivant par rapport à Q et en annulant la dérivée, nous aurons

$$Q=\sqrt{\frac{2*CL*D}{CS}}*\sqrt{\frac{CS+CP}{CP}}$$

2.3. Rythme d'approvisionnement

Il est possible de déterminer T en le remplaçant par sa valeur, soit $\frac{Q}{D}$, Ainsi, T $=\sqrt{\frac{2*CL}{CS*D}}*\sqrt{\frac{CS+CP}{CP}}$.

2.4. Coût moyen total d'approvisionnement

En remplaçant dans la fonction du coût moyen total S et Q et T par leurs valeurs, nous aurons : coût moyen total $=\sqrt{2*CS*CL*D}*\sqrt{\frac{CP}{CS+CP}}$

3. Demande constante et coûts d'achat non proportionnels

Dans la formule de Wilson pure, les coûts d'achat (prix d'achat et frais de stockage[1]) sont supposés être proportionnels. En effet, le coût total de réapprovisionnement incluant le prix d'achat se présente comme suit : $CT = D*P+CL*\frac{D}{Q}+P*S*\frac{Q}{2}$.

P : prix d'achat unitaire ; S : taux de frais de stockage. Dans ce cas, les prix globaux sont proportionnels à la demande (la quantité achetée pendant la période de stockage) et le coût de stockage est proportionnel au prix d'achat unitaire (P). En dérivant par rapport à Q et en annulant le résultat, nous obtenons $Q = \sqrt{\frac{2*CL*D}{P*S}}$.

Dans la réalité, il est possible d'envisager plusieurs problèmes de gestion des stocks où les coûts ne sont pas proportionnels. Nous nous limitons particulièrement aux cas où le prix d'achat global n'est pas proportionnel ; autrement dit, le prix d'achat unitaire n'est pas fixe, mais varie en fonction du temps ou de la quantité achetée.

3.1. Prix d'achat unitaire variable en fonction du temps

C'est le cas notamment où le fournisseur accorde une remise exceptionnelle dans le cadre d'une compagne promotionnelle non liée à la quantité achetée.

Ainsi, l'acheteur va augmenter le volume des achats d'une commande exceptionnelle QE pour bénéficier de cette compagne promotionnelle concrétisée par la pratique d'une remise unitaire R. Alors, le coût total d'approvisionnement est le suivant :

$$CT = (D-QE)*P+QE*(P-R)+\frac{(D-QE)}{Q}*CL+CL+\frac{Q}{2}*P*S*\frac{(D-QE)}{D}+\frac{QE}{2}*(P-R)*S*\frac{QE}{D}$$

$\frac{(D-QE)}{D}$: Proportion du temps pendant lequel l'achat est effectué sans remise ;

$\frac{QE}{D}$: Proportion du temps pendant lequel l'achat est effectué avec remise.

L'objectif est de déterminer QE et Q compte tenu de QE.

Les quantités QE et Q sont calculées en dérivant le coût total par rapport respectivement à QE et à Q et en annulant les résultats obtenus. Ainsi :

$QE = \frac{(R*D)}{(P-R)*S}+\frac{(Q*P)}{(P-R)}$ et $Q = \sqrt{\frac{2*CL*D}{P*S}}$ .Nous constatons que la quantité économique n'a pas été influencée par la commande exceptionnelle et par la remise accordée par le fournisseur.

3.2. Prix d'achat unitaire variable en fonction de la quantité achetée

Deux cas de figure sont envisagés : variation continue et variation discontinue ou par sauts. Dans le premier cas, il convient de modéliser le prix P en fonction de la quantité achetée Q : P = f(Q) qui est généralement une fonction décroissante, puisque le prix diminue au fur et à mesure que la quantité augmente et de poser la fonction du coût comme suit :

---

[1] Les frais de stockage comprennent les coûts constatés (dotations aux amortissements, primes d'assurances, frais de manutention, frais du personnel…) et les coûts d'opportunité correspondant au taux d'intérêt du marché financier.

CT=D* f(Q)+ CL* $\frac{D}{Q}$ +f(Q)*S* $\frac{Q}{2}$. Pour calculer Q (quantité économique), il faut remplacer f(Q) par sa valeur, puis dériver le coût total par rapport à Q et annuler le résultat obtenu.

Dans le second cas (variation discontinue), le prix décroît normalement au fur et à mesure que la quantité achetée augmente. Dans ce cas, il y a lieu de suivre les étapes suivantes :
- Calculer, pour chaque prix du tarif proposé, la quantité optimale d'après la formule de Wilson ;
- Vérifier la cohérence entre la valeur obtenue et le prix proposé ;
- En cas d'incohérence, choisir la quantité minimale qui permet de bénéficier du prix proposé ;
- Calculer, pour chaque prix proposé, le coût total du stock pour la quantité retenue ;
- Choisir la solution qui donne le coût total minimum.

4. Demande constante avec arbitrage raisonné entre rythme d'approvisionnement et stockage (modèle de Welch)

La conciliation, entre la taille du lot et le coût de stockage dans le modèle de Wilson pur, devient illusoire dans le contexte actuel caractérisé par la prédominance des coûts fixes (il est difficile de changer le coût des commandes à travers le nombre des commandes) et la tendance vers l'acquisition en petits lots. A ce niveau, Welch propose un modèle qui récupère en terme de réalisme et de normalisation ce qu'il perd en terme de coûts d'approvisionnement. Ainsi, le coût obtenu par le modèle de Welch n'est pas optimal. Cependant, le coût de stockage est optimisé par rapport au coût total d'approvisionnement. Le principe du modèle est de recalculer la quantité économique comme suit : $Q = \sqrt{\frac{2*CL*D}{CS}} = \sqrt{\frac{2*CL}{CS}} * \sqrt{D} = K * \sqrt{D}$. Le nombre de commandes $N = \frac{D}{Q} = \frac{D}{K*\sqrt{D}} = \frac{\sqrt{D}}{K}$. Donc $K = \frac{\sqrt{D}}{N}$. Par la suite, le modèle généralise et normalise cette formule pour l'ensemble des articles achetés et stockés par l'entreprise, par le recours à un K moyen. Ainsi, nous aurons $\overline{K} = \frac{\sum \sqrt{D}}{\sum N}$. Auparavant, l'entreprise aurait du déterminer le nombre de commandes d'une manière raisonnée de sorte à passer plus de commandes pour les articles les plus consommés ou ceux dont l'enjeu de rupture est grand.
En appliquant la moyenne des coefficients à K, nous obtenons une nouvelle quantité de commande telle que la somme des nombres de commandes sera égale au nombre de commandes déterminé d'une manière raisonnée, tout en minimisant les coûts de stockage par rapport au coût total d'approvisionnement.

5. Demande constante satisfaite par production interne

Il est fréquent que la demande de l'entreprise en produits finis, en produits semi-ouvrés ou en composants soit satisfaite par une production interne à l'entreprise. Dans ce cas, une série de fabrication doit être lancée périodiquement pour reconstituer progressivement le stock susceptible de satisfaire ladite demande. Au début de la période de réalisation de ladite série, le stock ne sera pas de Q comme c'est le cas d'une commande satisfaite par un fournisseur externe, mais d'une quantité supérieure à partir de l'hypothèse que la capacité de production réalisable[1] est supérieure à la demande et que cette capacité sera pleinement utilisée. La formalisation est la suivante :

- p : production réalisable par unités de temps ;
- d : demande par unités de temps ;
- t : durée de fabrication d'une série pour reconstituer la quantité économique Q
- S: stock

$Q = p*t$; $S = (p-d)*t \Rightarrow \frac{S}{Q} = \frac{(p-d)*t}{p*t} = \frac{(p-d)}{p} \Rightarrow S = Q*\frac{(p-d)}{p}$.

Le coût total d'approvisionnement hors prix d'achat interne est constitué par le coût de lancement d'une série de fabrication (coût de réglage, de mise au point…) qui s'apparente au coût de lancement d'une commande auprès d'un fournisseur externe (CL) et du coût de stockage calculé sur le stock moyen $\frac{Q}{2}*\frac{(p-d)}{p}$. Ainsi, ce coût total se présente ainsi : $CT = CL*\frac{D}{Q} + CS*\frac{Q}{2}*\frac{(p-d)}{p}$. En dérivant par rapport à Q et en annulant le résultat, nous obtenons

$Q = \sqrt{\frac{2*CL*D}{CS*\frac{(p-d)}{p}}} = \sqrt{\frac{2*CL*D}{CS}}*\sqrt{\frac{p}{(P-d)}}$. En remplaçant dans la fonction de coût total Q par sa valeur, nous obtenons la formule du coût optimal suivante :

$CT^* = \sqrt{2*D*CL*CS*\frac{(p-d)}{p}}$.

6. Demande constante avec contraintes

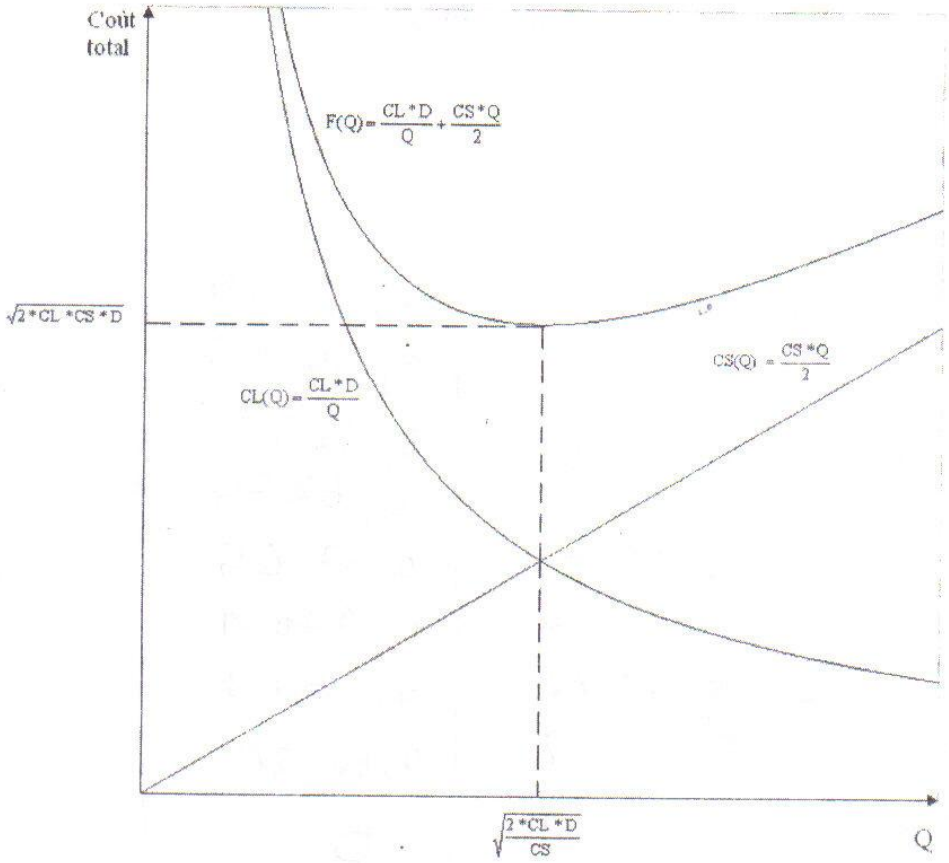
La commande d'une quantité donnée est, dans la pratique, conditionnée par la disponibilité d'un ensemble de ressources : financières, matérielles (aire de stockage, manutention, transport…), informationnelles (capacité cybernétique, supports d'information…) et humaines. Ainsi, la quantité économique au sens de Wilson se trouve affectée par la limitation des ressources précitées dans le temps et l'espace. L'optimisation du coût total avec contraintes se pose comme suit : $CT = \sum CL_i*\frac{D_i}{Q_i} + \frac{Q_i}{2}*CS_i$ sous une ou plusieurs contraintes de type $G(Q) = \sum \alpha_i * Q_i = C$. Pour réaliser cette optimisation, le lagrangien s'avère le plus opérant en en envisageant une fonction $F(Q) = CT+\lambda*G(Q)$ et en respectant les conditions du premier ordre $\frac{\delta F(Q)}{\delta Q_i} = 0$; $\frac{\delta F(Q)}{\delta \lambda} = 0$ et les conditions du second ordre pour s'assurer qu'il s'agit effectivement d'un minimum. Pour ce faire, il faut montrer que les (n-1) mineurs principaux orthogonaux de la matrice hessienne bordée $H_{F(Q)}(Q_i,\lambda)$ sont tous inférieurs à 0(zéro)[2]. La matrice hessienne bordée est la matrice des dérivées partielles secondes de F (Q) par rapport à Q_i bordée par les dérivées partielles premières de G.

---

[1] C'est la capacité maximale diminuée d'unités correspondant aux contraintes techniques (réglage, entretien…), sociales (absentéisme, accidents de travail, rotation du personnel, grève…) et stratégiques.

[2] Cette condition est valable dans le cas où il y a une seule contrainte G(Q).

Synthèse de la formule de Wilson et ses prolongements



L'inexistence de solution (non rencontre des fonctions CL(Q) et CS(Q)) correspond notamment à la situation suivante : CL(Q) ≠ 0 et CS(Q)=0 ou Q = 0. CS(Q)=0 $\Rightarrow\begin{cases} CS=0 \\ Q=0 \end{cases}$. La solution la plus plausible est CS=0 ; ce qui correspond à une situation de gestion partagée avec les fournisseurs et de juste à temps idéale.

La formule de Wilson pure se base sur les quatre hypothèses suivantes :

- Constance de la demande (régularité, invariabilité et prévisibilité) ;
- Proportionnalité des coûts d'achat et de stockage par rapport à la quantité achetée ;
- Absence de contraintes ;
- Absence de pénurie et de rupture des stocks.

Pour rendre la formule de Wilson plus opérante, sont effectuées des transcendances auxdites hypothèses. Ainsi, pour la quatrième hypothèse, il a été proposé une formule qui tient compte de la pénurie, pour la deuxième hypothèse, il a été développé des formules adaptées à des cas de coûts d'achat non proportionnels. Pour la troisième hypothèse, les contraintes ont été réintégrées à la formule de Wilson à travers le lagrangien. Au niveau de la première hypothèse, il est possible de dépasser l'invariabilité de la quantité économique au travers de la gestion des stocks par périodes constantes Dans ce cas, les quantités sont variables et les rythmes d'approvisionnement sont constants. Ainsi, le rythme optimal d'approvisionnement remplace la quantité économique dans l'hypothèse de proportionnalité des coûts d'approvisionnement.

Mieux encore, les remaniements de la formule de Wilson s'étendent aux cas d'arbitrage raisonné entre rythme d'approvisionnement et de stockage (modèle de Welch) et à l'achat interne auprès d'un fournisseur interne. Il est toujours possible d'étendre la formule de Wilson à d'autres cas.

Modèles probabilistes de gestion des stocks

Les modèles probabilistes ou stochastiques sont appliqués dans des situations probabilisables provenant d'aléas ou d'incertitudes entachant la demande par unités de temps, le délai d'approvisionnement mesuré dans les mêmes unités de temps ou les deux à la fois.
Les modèles probabilisables peuvent se rapporter à la gestion à point de commande ou à la gestion calendaire. Avant d'étudier les deux cas de figure, nous passons en revue l'analyse des paramètres de la loi de la demande.
La demande D_t se présente comme une variable aléatoire comportant deux variables d (demande par unités de temps) et l (délai de livraison mesuré dans la même unité de temps). Ainsi $D_t = d*l$. Ici les trois cas suivants sont possibles :
1- Seule la demande par unités de temps (d) est incertaine. Dans ce cas, les valeurs typiques de D_t sont calculées comme suit : $E(D_t)= E(d*l) = l*E(d)$; $V(D_t)= V(d*l)= l*V(d)$, dans la mesure où les demandes (d) sont considérées comme indépendantes les unes des autres.
2- Seule le délai d'approvisionnement est incertain. Dans ce cas, les valeurs typiques de D_t sont calculées comme suit : $E(D_t)= E(d*l) = d*E(l)$; $V(D_t)= V(d*l)= d^2*V(l)$.
3- La demande par unités de temps et le délai d'approvisionnement sont incertains. Dans ce cas, les valeurs typiques de D_t sont calculées comme suit : $E(D_t)= E(d*l) = E(l)*E(d)$;
$V(D_t)= E(l)*V(d) + E(d^2)*V(l)$.

1- Gestion à point de commande

La gestion à point de commande cherche à déterminer le niveau à partir duquel l'entreprise doit passer une commande tout en minimisant les coûts de stockage et de rupture éventuelle des stocks. Les modèles de gestion à point de commande se basent sur le stock de sécurité. Ces modèles sont scindés en deux types : modèles ne tenant pas compte du coût de rupture des stocks et modèles tenant compte du coût de rupture des stocks.

1.1. Modèles ne tenant pas compte du coût de rupture des stocks

Dans ce cas, le stock de sécurité est déterminé d'une manière subjective (d'après l'expérience des gestionnaires des stocks) selon une contrainte de service $(1-\alpha)$[1] qui traduit souvent la réduction du nombre ou du volume de ruptures durant le cycle d'exploitation.
Une fois les caractéristiques de la demande pendant le délai d'approvisionnement définies, il devient possible de déterminer le point de commande SR et le stock de sécurité SS. Ce dernier est calculé à partir de l'équation suivante : $SR = E(D_t) + SS$ avec $E(D_t)$: espérance mathématique de la demande de la période correspondant, en pratique, au stock minimum.
Le stock de sécurité étant constitué pour faire face à une rupture éventuelle des stocks, celle-ci peut avoir lieu dés lors que $D_t > SR$. La probabilité de rupture correspond alors à $P\{D_t > SR\} = \alpha$.
Le calcul de la probabilité de rupture est différencié selon que la variable aléatoire est continue ou discrète.

1.1.1. Variable aléatoire continue

Dans ce cas, $P\{D_t > SR\} = \int_{SR}^{+\infty} f(D_t).dD_t$. Du moment que la variable aléatoire est continue, la loi de probabilité la plus adéquate est la loi normale. Ainsi, il est possible de recourir à la probabilité de non rupture qui correspond à la fonction de répartition de la loi normale, soit :
$P\{D_t < SR\} = 1 - \int_{SR}^{+\infty} f(D_t).dD_t = \int_{-\infty}^{SR} f(D_t).dD_t$, où $f(D_t)$ représente la fonction de densité de la loi

[1] α représente le taux de rupture admis pour assurer un taux de service $(1-\alpha)$

normale (demande pendant le délai d'approvisionnement). Par référence à une loi normale centrée réduite, $P\ \{D_t<SR\}= F_0\ (SR) = P\{Dt < \frac{SR - E(D_t)}{\sigma(D_t)}\} = 1 - \alpha$ (seuil de confiance). A partir de la valeur de l'écart réduit, il est possible de calculer SR et SS.

1.1.2. Variable aléatoire discrète

Dans ce cas, la probabilité de rupture correspond $P\ \{D_t>SR\}= \sum_{SR+1}^{+\infty} P(D_t) = \alpha$, où P (D) mesure la probabilité d'un niveau de demande pendant le délai de livraison.

1.2. Modèles tenant compte du coût de rupture des stocks

Dans ce cas, le stock de sécurité est déterminé d'une manière objective de telle sorte que son coût soit minimisé. A ce niveau, nous retenons les deux cas suivants : cas où le coût de rupture s'applique uniquement au nombre de ruptures et cas où le coût de rupture se rapporte aux unités de demande non satisfaites.

1.2.1. Cas où le coût de rupture s'applique uniquement au nombre de ruptures

Dans ce cas, le coût de rupture s'applique à la rupture elle même sans tenir compte du volume des demandes non satisfaites. Deux situations sont alors envisageables : la demande est une variable aléatoire continue, la demande est une variable aléatoire discrète. Avant de traiter chaque cas distinctement, il convient d'expliciter, en plus des paramètres déjà explicités, les paramètres suivants : DA : demande annuelle et SA : stock actif.

*** La demande est une variable aléatoire continue**

Dans ce cas, le coût relatif au stock de sécurité noté CSS s'écrit :

$CSS = CS*SS+CR*\ P\{D_t>SR\}*\ \frac{DA}{SA}$ (ce rapport désigne le nombre de ruptures). Si nous utilisons, à ce niveau, une loi normale centrée réduite, nous pourrons remplacer $P\{D_t>SR\}$ par $1- P\{D_t<SR\}$, soit $F_0(-SR)$. Ainsi, nous aurons $CSS = CS*SS+CR*\ F_0\ (-SR)\ *\frac{DA}{SA}$. En remplaçant SS par sa valeur, soit $SR- E\ (D_t)$, l'expression du coût devient :

$CSS = CS*(SR- E\ (D_t)) + CR*\ F_0\ (-SR)\ *\frac{DA}{SA}$. En dérivant par rapport à SR, nous obtenons l'expression suivante : $CS - CR*f\ (SR)*\frac{DA}{SA}$. En égalant la dérivée à zéro, nous aurons :

$f\ (SR) = \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA}$. f (SR) représente la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

*** La demande est une variable aléatoire discrète**

Dans ce cas, un raisonnement marginal est employé. Dans le cas d'une augmentation du stock de sécurité d'une unité, le coût s'écrit : $C\ (SS+1)=CS*(SS+1) + CR*P\{D_t>SR+1\}*\frac{DA}{SA}$. Le coût de l'unité supplémentaire est alors de $\Delta CSS = CS-CR*\ P\{D_t=SR+1\}*\frac{DA}{SA}$. Pour que l'unité en plus se justifie, il faut que $CS-CR*\ P\ \{D_t=SR+1\}*\frac{DA}{SA} \geq 0$, cela implique que $P\{D_t=SR+1\} \leq \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA}$. Dans le cas d'une diminution du stock de sécurité d'une unité, le coût s'écrit : $C\ (SS-1)=CS*(SS-1) + CR*P\{D_t>SR-1\}*\frac{DA}{SA}$. Le coût de l'unité en moins

s'écrit alors: $\Delta CSS = CS\text{-}CR^* P\{D_{t=}SR\}^* \frac{DA}{SA}$. Pour que l'unité en moins se justifie, il faut que $CS\text{-}CR^* P\{D_{t=}SR\}^* \frac{DA}{SA} \leq 0$, cela implique que $P\{D_{t=}SR\} \geq \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA}$. Ainsi pour que SR et SS soient optimaux, il faut que $P\{D_{t=}SR+1\} \leq \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA} \leq \{D_{t=}SR\}$.

1.2.2. Cas où le coût de rupture se rapporte aux unités de demande non satisfaites.

Le modèle de gestion des stocks en vue du traitement du volume des demandes non satisfaites est différencié selon que la variable aléatoire est continue ou discrète.

***Cas d'une variable aléatoire continue**

$CSS = CS^*(SR\text{-}E(D_t)) + CR^* \int_{SR}^{+\infty} (D_t - SR) f(D_t).dD_t * \frac{DA}{SA}$. Le deuxième terme désigne l'espérance mathématique du nombre d'unités manquantes pendant l'unité de temps retenue. En dérivant par rapport à SR, nous obtenons : $CS\text{-}CR^* P\{D_t>SR\}^* \frac{DA}{SA}$. En annulant le résultat, nous optimiserons SR et SS si $P\{D_t>SR\} = \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA}$ ou $P\{D_t<SR\} = 1 - \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA}$.

***Cas d'une variable aléatoire discrète**

Un raisonnement marginal, similaire à celui développé dans le cas où le coût de rupture s'applique uniquement au nombre de ruptures, permet de dire que SR et SS sont optimaux si la condition suivante est remplie : $P\{D_t>SR\} \leq \frac{CS}{CR} * \frac{SA}{DA} \leq \{D_{t\geq}SR\}$.

2. Gestion calendaire

Les deux cas de figures suivants sont possibles :

- Demande aléatoire avec perte sur les excédents et coût de pénurie sans tenir compte du coût de stockage ;
- Demande aléatoire avec coût de pénurie et coût de stockage.

2.1. Cas d'une demande aléatoire avec perte sur les excédents et coût de pénurie

Dans ce cas, la demande D est aléatoire pendant un intervalle de temps T et suit une loi de probabilité P (D).

Si D ≤S (stock), l'excédent de stock est vendu avec une perte unitaire de C1 calculée sur S-D ;
Si D>S, l'entreprise supporte un coût de pénurie unitaire de C2 calculé sur D-S.

Connaissant la loi de probabilité P (D), il est possible de déterminer l'espérance mathématique des coûts relatifs au stock E (CS) dont le calcul diffère selon que la variable aléatoire est discrète ou continue.

2.1.1. Cas d'une variable aléatoire discrète

E (CS) = $C1*\sum_{D=0}^{S}(S-D).P(D)+C2*\sum_{D=S+1}^{\infty}(D-S).P(D)$. Procédons à un calcul marginal et calculons d'abord E (CS+1). E (CS+1)= $C1*\sum_{D=0}^{S+1}(S+1-D).P(D)+C2*\sum_{D=S+2}^{\infty}(D-S-1).P(D)$.

$C1*\sum_{D=0}^{S+1}(S+1-D).P(D) = C1*\sum_{D=0}^{S}(S+1-D).P(D)+C1*[(S+1)-(S+1)].P(S+1) = C1*\sum_{D=0}^{S}(S+1-D).P(D)$

$C2*\sum_{D=S+2}^{\infty}(D-S-1).P(D) = C2*\sum_{S+1}^{\infty}(D-S-1).P(D)-C2*[(S+1)-(S+1)].P(S+1) = C2*\sum_{D=S+1}^{\infty}(D-S-1).P(D)$ .En développant les deux termes, nous aurons :

E (CS+1) = $C1*\sum_{D=0}^{S}(S-D).P(D)+C1*\sum_{D=0}^{S}P(D)+C2*\sum_{D=S+1}^{\infty}(D-S).P(D)-C2*\sum_{D=S+1}^{\infty}P(D)$.

En remplaçant $\sum_{D=S+1}^{\infty}P(D)$ par 1- $\sum_{D=0}^{S}P(D)$, nous aurons :

E (CS+1) = $C1*\sum_{D=0}^{S}(S-D).P(D)+C2*\sum_{D=S+1}^{\infty}(D-S)+C1*\sum_{D=0}^{S}P(D)-C2+C2*\sum_{D=0}^{S}P(D)$.

Enfin E (CS+1) = E (CS) + (C1+C2).P {D≤ S}-C2. De la même manière, nous obtiendrons : E (CS-1) = E (CS)- (C1+C2). P {D≤ S-1} +C2.

Pour que l'unité en plus se justifie, il faut que (C1+C2).P {D≤ S}-C2 >0. Cela implique que : P {D≤ S}> $\frac{C2}{C1+C2}$. De même pour que l'unité en moins soit justifiée, il faut que :

(C1+C2). P {D≤ S-1} -C2 <0. Cela implique que P {D≤ S-1} < $\frac{C2}{C1+C2}$. Ainsi, S est optimum lorsque : $\boxed{P\{D\leq S-1\} < \frac{C2}{C1+C2} < P\{D\leq S\}}$[2].

[2] : Dans le cas où P {D≤ S-1} < $\frac{C2}{C1+C2}$ =P {D≤ S}, cela signifie que E(CS+1) = E(CS). Ainsi, l'optimum correspond indifféremment à S ou S+1. Dans le cas où : P {D≤ S-1} = $\frac{C2}{C1+C2}$ <P {D≤ S}, cela signifie que E (CS-1) = E (CS). Aussi, l'optimum correspond indifféremment à S ou S-1.

2.1.2. Cas d'une variable aléatoire continue

Dans ce cas, la distribution de probabilité P (D) est remplacée par la densité de probabilité f(D). Nous aurons alors E (CS) = $C1*\int_0^S (S-D).f(D).dD + C2*\int_S^\infty (D-S).f(D).dD$. En dérivant par rapport à S, nous obtenons : E (CS)' = $C1*\int_0^S f(D).dD - C2*\int_S^\infty f(D).dD =$

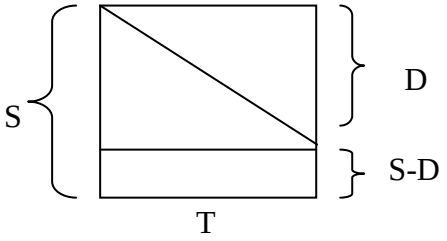
C1*F(S) - C2*(1-F(S)) = (C1+C2)*F(S) - C2. En annulant la dérivée, nous aurons F(S)= $\frac{C2}{C1+C2}$. Ainsi, l'optimum de S est obtenu lorsque la fonction de répartition

$$F(S)=\frac{C2}{C1+C2}.$$

2.2. Cas d'une demande aléatoire avec coût de pénurie et coût de stockage

Dans ce cas, les deux situations suivantes sont possibles : D ≤ S et D> S.

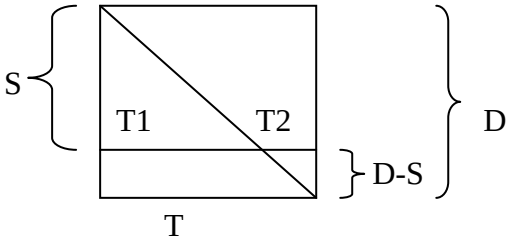
*** D ≤ S** Cette situation est visualisée par le schéma suivant :



Le stock moyen correspond à $\frac{(S=D)}{2}+\frac{(S>D)}{2}$.

Ainsi, il est égal à $=\frac{S}{2}+\frac{S-D}{2}=S-\frac{D}{2}$

*** D> S** Cette situation est représentée par le schéma suivant :



A partir des propriétés des triangles homothétiques, il est possible d'écrire les égalités suivantes : $\frac{T1}{T}=\frac{S}{D}$ et $\frac{T2}{T}=\frac{D-S}{D}$.

T1 : période de T où le stock est suffisant pour faire face à la demande. Pendant cette période, stock moyen = $\frac{S}{2}*\frac{T1}{T}=\frac{1}{2}*\frac{S^2}{D}$.

T2 : période de T où il y a pénurie de (D-S). Pendant cette période, la pénurie moyenne = $\frac{D-S}{2}*\frac{T2}{T}=\frac{1}{2}*\frac{(D-S)^2}{D}$.

Pour une variable aléatoire discrète, l'espérance mathématique du coût du stock se présente comme suit : $CS*\sum_{D=0}^{S}(S-\frac{D}{2}).P(D)+CS*.\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{S^2}{D}).P(D)+CP*\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(D-S)^2}{D}).P(D)$ En procédant à un calcul marginal comme auparavant, nous aurons E (CS+1) = $CS*\sum_{D=0}^{S+1}(S+1-\frac{D}{2}).P(D)+CS*\sum_{D=S+2}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(S+1)^2}{D}).P(D)+CP*\sum_{D=S+2}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(D-S-1)^2}{D}).P(D).$

◆ $CS*\sum_{D=0}^{S+1}(S+1-\frac{D}{2}).P(D)= CS*\sum_{D=0}^{S}(S+1-\frac{D}{2}).P(D)+ CS*(S+1-\frac{S+1}{2}).P(S+1)=$

$CS*\sum_{D=0}^{S}(S-\frac{D}{2}).P(D)+ CS*\sum_{D=0}^{S}P(D)+CS*\frac{S+1}{2}.P(S+1).$

◆ $CS*\sum_{D=S+2}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(S+1)^2}{D}).P(D)= CS*\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(S+1)^2}{D}).P(D)- CS*\frac{(S+1)^2}{2*(S+1)}.P(S+1) =$

$CS*\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{S^2}{D}).P(D)+ CS*\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{S}{D}).P(D)+ CS*\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{P(D)}{D})- CS*\frac{S+1}{2}.P(S+1).$

◆ $CP*\sum_{D=S+2}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(D-S-1)^2}{D}).P(D)=CP*\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(D-S-1)^2}{D}).P(D)-CP*\frac{((S+1)-(S+1))^2}{2*(S+1)}.P(S+1)$

$= CP*\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{(D-S)^2}{D}).P(D)- CP*\sum_{D=S+1}^{\infty}P(D)+ CP*\sum_{D=S+1}^{\infty}\frac{S}{D}.P(D)+ CP*\sum_{D=S+1}^{\infty}(\frac{1}{2}*\frac{P(D)}{D}).$

En faisant la somme des trois termes et en remplaçant $\sum_{D=S+1}^{\infty}P(D)$ par 1- $\sum_{D=0}^{S}P(D)$, nous aurons :

E (CS+1) = E (CS) + (CS+CP)*[P (D≤S) + (S+$\frac{1}{2}$)* $\sum_{D=S+1}^{\infty}\frac{P(D)}{D}$] - CP. En posant

L(S) = P (D≤S) + (S+$\frac{1}{2}$)* $\sum_{D=S+1}^{\infty}\frac{P(D)}{D}$, E (CS+1) = E (CS) + (CS+CP)* L(S) – CP.

En procédant également à un calcul marginal, nous obtenons :
E (CS-1) = E (CS) - (CS+CP)*L(S-1) + CP.
Dans la mesure où L(S) est croissante avec S, nous pourrons affirmer que les unités en plus et en moins seront justifiées dans le cas où les conditions respectives suivantes sont accomplies :

◆ (CS+CP)*L(S) – CP >0 ⇒ L(S) > $\frac{CP}{CS+CP}$

◆ - (CS+CP)*L(S-1) + CP < 0 ⇒ L(S-1) < $\frac{CP}{CS+CP}$

Finalement la valeur S qui minimise l'espérance mathématique du coût du stock doit satisfaire la condition suivante : $\boxed{L(S-1)<\frac{CP}{CS+CP}<L(S)}$[3]

[3] : Dans le cas où L(S-1) < $\frac{CP}{CS+CP}$ =L(S), cela signifie que l'optimum correspond indifféremment à S ou S+1. Dans le cas où : L(S-1) = $\frac{CP}{CS+CP}$ <L(S), cela signifie que l'optimum correspond indifféremment à S ou S-1.

Gestion des flux- stocks immatériels

Les stocks immatériels (ordres de production, stocks de commandes…) sont révélateurs de dysfonctionnements issus de la relation clients- fournisseurs internes. Les techniques de gestion des flux –stocks immatériels doivent être de nature transversale et processuelle (gérer les processus) telles que supply chain management, Kanban et ABM (activity based management) qui se propose l'amélioration des processus à travers la coordination des activités et leur chaînage. C'est cette dernière technique qui sera utilisée pour la gestion des flux- stocks immatériels. Ainsi, Le degré de tension des flux et d'écrêtement des stocks est appréhendé par un indice de qualité synthétique de la relation des acteurs internes analysée dans le processus concerné. Les critères d'appréciation de cette relation sont de deux ordres : rapidité (nombre de points de saisie des flux) et pertinence (qualité d'analyse des flux- stocks). L'indice de qualité des flux- stocks immatériels se détermine d'après les étapes suivantes :

- Choix d'une échelle de notation donnée qui intègre les deux critères : rapidité et pertinence. Ainsi, le système des flux- stocks immatériels doit optimiser simultanément le délai et la qualité des opérations accomplies dans l'entreprise. La notation sur cette échelle doit être considérée comme une fonction continue. Sur cette échelle, les deux critères doivent évoluer dans un sens opposé pour pouvoir définir les limites inférieure et supérieure.
- Définition des limites inférieure et supérieure : la limite inférieure est celle en deçà de laquelle le système des flux- stocks immatériels n'est pas adéquat pour prendre les décisions en temps réel. Quant à la limite supérieure, elle est celle au-delà de laquelle le système précité n'est pas assez pertinent pour prendre les bonnes décisions.
- Détermination du coefficient de sévérité avec lequel est appréciée la qualité du système des flux- stocks immatériels : il est fixé une note y (d'après l'échelle de notation) estimée correspondre à un indice de qualité compris entre 0 et1.
- Calcul de l'indice de qualité : il se calcule selon la formule suivante : $S_Y = \exp(-|U|^n)$ avec $U = \frac{2y - (y\,max + y\,min)}{(y\,max - y\,min)}$; y max et y min sont les limites inférieure et supérieure et n est le degré de sensibilité de la qualité des flux- stocks immatériels aux critères : rapidité et pertinence. Ainsi, $n = \frac{\log(\log(1/S_y))}{\log(|U|)}$. Il s'agit bien entendu.

LES TRAVAUX DIRIGES

TD N ° 1 EN GESTION DES STOCKS

I- Durant les mois de juin, juillet, août et septembre les statistiques des ventes d'une entreprise révèlent une consommation globale de 7320 unités. Chaque approvisionnement occasionne 19,20 dh de frais. Par ailleurs, le coût journalier unitaire de stockage est de 0,04 dh. Durant la période s'étalant de juin à septembre, l'entreprise a pu s'organiser de telle sorte qu'elle n'y ait aucun jour de fermeture.

Questions

1- Déterminez la quantité optimale à commander
2- Déterminez le rythme optimal d'approvisionnement
3- Déterminez le coût optimal de la commande
4- Etudiez la sensibilité du coût de la commande par rapport à une variation de 10% de la quantité optimale de la commande

II- Un fabricant d'accessoires pour automobiles reçoit une commande de 120000 tableaux de bord à livrer sur un an. Le coût unitaire journalier de stockage est de 3,50 dh alors que le coût de passation de la commande est de 300000 dh. Par ailleurs, la carence de pénurie est pénalisée par un coût unitaire journalier de 35 dh.

Questions

1- Déterminez la quantité économique
2- Déterminez le stock de service
3- Déterminez le rythme optimal d'approvisionnement
4- Déterminez le coût optimal de la commande

TD N ° 2 EN GESTION DES STOCKS

I- Une entreprise estime à 2000 unités par an la demande des articles d'elle commercialise. Dans la perspective d'une politique optimale d'approvisionnement, le service des statistiques a fait ressortir les éléments suivants :

- Prix d'achat unitaire : 1000 dhs ;
- Coût d'une commande : 1500 dhs ;
- Taux de frais de stockage : 15% ;
- Le fournisseur accorde une remise exceptionnelle indépendante du volume des achats s'élevant à 40 dhs par unité au cours de la dernière commande de l'année.

Questions :

1- Déterminez la quantité économique de la commande normale Q (celle ne bénéficiant pas de la remise exceptionnelle) ;
2- Déterminez la quantité économique de la commande bénéficiant de la remise exceptionnelle (QE);
3- Calculez le coût optimal d'approvisionnement ;
4- Calculez le nombre de commandes et déterminez le rythme optimal d'approvisionnement sachant que l'année comporte 287 jours ouvrables

II- Dans une entreprise, le prix d'achat (P) varie selon la quantité achetée (Q) d'après la fonction suivante : $P = f(Q) = 250 + \frac{2500}{Q}$. La demande pendant l'année comportant 300 jours ouvrables est de 2500 unités ; Le taux de frais de stockage est de 20% et le coût de lancement d'une commande est de 1100 dhs.

Questions : Déterminez :

1. Quantité économique
2. Rythme d'approvisionnement
3. Coût total d'approvisionnement

TD N ° 3 EN GESTION DES STOCKS ET APPROVISIONNEMENTS

I-Une entreprise consomme 500 unités par période d'approvisionnement. Elle supporte un coût de passation d'une commande de 90 DH et un coût de possession de 25%. Son fournisseur lui propose les conditions d'achat suivantes :
Achat <100 unités : 42 DH ;
100 ≤Achat< 500 unités : 40 DH ;
Achat≥ 500 unités : 38 DH.

Question : Quelle est la quantité que l'entreprise doit acheter pour minimiser le coût d'approvisionnement, compte tenu des tarifs dégressifs du fournisseur ?

II-Dans le cadre de son activité, une entreprise achète 5 produits. Elle supporte un coût fixe de passation de la commande de 5000 DH et un coût de stockage de 400 DH par unité et par an. Les données relatives aux consommations et aux commandes annuelles sont consignées dans le tableau suivant :

Articles	demande	Nombre de commandes
A	12000	36
B	6000	12
C	1200	6
D	600	4
E	120	2
Total	19920	60

Questions :

1. Déterminez les quantités et le coût total des 5 articles d'après le système utilisé par l'entreprise ;
2. Déterminez les quantités et le coût total des 5 articles d'après le modèle de Welch ;
3. Comparez les résultats.

TD N ° 4 EN GESTION DES STOCKS

I- Dans l'entreprise SIMEF spécialisée dans la fabrication de cyclomoteurs, l'atelier d'assemblage a besoin de 20000 guidons qui seront livrés par l'atelier de fabrication de guidons. Le recensement des coûts et de l'activité a décelé les éléments suivants :

- Coût de lancement d'une série de fabrication : 2000 dhs ;
- Coût de stockage par unité et par période : 4 dhs ;
- Production réalisable par jour : 500 unités ;
- La période d'approvisionnement comporte 200 jours

Questions

1. Déterminez la quantité économique Q ;
2. Déterminez t (durée de fabrication), S (stock) et visualisez la relation entre Q, t et S
3. Déterminez le coût d'approvisionnement optimal hors prix d'achat interne

II- Une entreprise achète et stocke deux articles X et Y ayant les caractéristiques suivantes :

Eléments	X	Y
Demande de la période	1000 unités	1960 unités
CL (coût de passation)	50 dhs	50 dhs
CS (coût de possession) unitaire de la période	100 dhs	64 dhs
Espace de stockage occupé par unité	0,05 m^2	0,08 m^2

Questions

1- Déterminez les quantités de X et Y (valeurs entières) compte tenu de la contrainte de stockage dont la capacité maximale est de 4,05 m^2

2- Montrez à travers la matrice hessienne bordée qu'il s'agit effectivement d'un coût total minimum

TD N ° 5 EN GESTION DES STOCKS

I- Selon la formule de Wilson pure, la fonction du coût total se présente comme suit : $CT = \frac{140544}{Q} + 2{,}44 * Q.$

Questions :

1- Déterminez la quantité économique et le coût optimal relatif à cette quantité

2- Déterminez le coût moyen sur l'intervalle constitué à partir d'une variation de 20% autour de la quantité économique

II- La Demande des roulements dans une entreprise de janvier à juillet 2007 se présente comme suit :

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
36	12	57	18	14	24	21

Le délai d'approvisionnement constant est de 15 jours. Pendant ce délai, la demande est considérée comme une variable aléatoire suivant une loi normale.

Question : Déterminez le point de commande et le stock de sécurité de sorte que la rupture éventuelle des stocks ne dépasse pas 4% au delà du mois de juillet.

III- Déterminez au seuil de confiance de 95% le point de commande et le stock de sécurité dans les cas suivants :

1- Le délai d'approvisionnement est constant (3 semaines) alors que la demande par semaine est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 40 unités et d'écart-type 20 unités pendant la semaine.

2- La demande par semaine est constante (40 unités) alors que le délai d'approvisionnement est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 3 semaines et d'écart-type 3 jours.

3- La demande et le délai d'approvisionnement sont des variables aléatoires suivant une loi normale avec les mêmes caractéristiques précitées

IV- L'analyse de la demande hebdomadaire dans une entreprise révèle la loi de probabilité suivante :

Quantités demandées	Probabilités
20	0,3
25	0,4
30	0,3

Le calcul de la loi de probabilité de la demande pendant le délai d'approvisionnement a donné les résultats suivants :

SR	P {D=SR}
80	0,0081
85	0,0432
90	0,1188
95	0,2064
100	0,247
105	0,2064
110	0,1188
115	0,0432
120	0,0081

Question : Déterminez SR et SS de sorte que le risque de rupture des stocks ne dépasse pas 5%, sachant que le délai d'approvisionnement est de 4 semaines.

TD N ° 6 EN GESTION DES STOCKS

I- Le délai d'approvisionnement dans une entreprise est de 7 jours. La demande par jour suit une loi normale dont la moyenne et l'écart-type sont respectivement de 10 tonnes et de 7,5 tonnes. Le coût de détention d'une tonne pendant un an est de 51 dh et le coût d'une rupture des stocks s'évalue à 400 dh. La demande annuelle moyenne est estimée à 2500 tonnes et le niveau de stock actif à 500 tonnes.

Questions

1- Déterminez SR et SS de telle sorte que le coût du stock de sécurité soit minimisé

2- Déterminez le coût du stock de sécurité optimum

II- Une société achète des produits par série de 5000 unités pour satisfaire une demande annuelle de 20000 unités, correspondant à un nombre de jours ouvrables de 250 jours. Le coût de détention d'une unité achetée pendant l'année s'élève à 4 dh. Par ailleurs, le délai d'approvisionnement est une variable aléatoire suivant une loi de poisson dont la moyenne et la variance ont une valeur de 0,5 jours.

Question : Déterminez SR et SS

1- Dans le cas où le coût de rupture est indépendant du volume des demandes non satisfaites et s'élève à 2500 dh

2- Dans le cas où le coût de rupture est lié au volume des demandes non satisfaites et le coût par unité de demande non satisfaire s'élève à 50 dh

TD N ° 7 EN GESTION DES STOCKS

I- Dans une entreprise la perte unitaire sur l'excédent des stocks vendable est de 50 dh alors que le coût unitaire de pénurie est de 1000 dh. La distribution de la demande est donnée par le tableau suivant :

Niveau du stock : S et de la demande D	P (D)
0	0,9
1	0,05
2	0,02
3	0,01
4	0,01
5	0,01
>5	0

Questions :

1- Déterminez le niveau du stock optimal

2- Calculer l'espérance mathématique du coût du stock optimal

II -Dans une entreprise les coûts de stockage et pénurie sont respectivement de 100000 dh et 1900000 dh. La distribution de la demande se présente comme suit :

Niveau du stock : S et de la demande D	Nombre d'occurrences
0	5
1	10
2	10
3	15
4	5
5	5
>5	0

Questions :

1- Déterminez le niveau du stock optimal

2- Calculer l'espérance mathématique du coût du stock optimal

TABLES STATISTIQUES

III. LOI DE POISSON

Fonction de répartition

k \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,367 9	0,135 3	0,049 8	0,018 3	0,006 7	0,002 5	0,000 9	0,000 3	0,000 1	—
1	0,367 9	0,270 7	0,149 4	0,073 3	0,033 7	0,014 9	0,006 4	0,002 7	0,001 1	0,000 5
2	0,183 9	0,270 7	0,224 0	0,146 5	0,084 2	0,044 6	0,022 3	0,010 7	0,005 0	0,002 3
3	0,061 3	0,180 4	0,224 0	0,195 4	0,140 4	0,089 2	0,052 1	0,028 6	0,015 0	0,007 6
4	0,015 3	0,090 2	0,168 0	0,195 4	0,175 5	0,133 9	0,091 2	0,057 3	0,033 7	0,018 9
5	0,003 1	0,036 1	0,100 8	0,156 3	0,175 5	0,160 6	0,127 7	0,091 6	0,060 7	0,037 8
6	0,000 5	0,012 0	0,050 4	0,104 2	0,146 2	0,160 6	0,149 0	0,122 1	0,091 1	0,063 1
7	0,000 1	0,003 4	0,021 6	0,059 5	0,104 4	0,137 7	0,149 0	0,139 6	0,117 1	0,090 1
8	—	0,000 9	0,008 1	0,029 8	0,065 3	0,103 3	0,130 4	0,139 6	0,131 8	0,112 6
9		0,000 2	0,002 7	0,013 2	0,036 3	0,068 8	0,101 4	0,124 1	0,131 8	0,125 1
10		—	0,000 8	0,005 3	0,018 1	0,041 3	0,071 0	0,099 3	0,118 6	0,125 1
11			0,000 2	0,001 9	0,008 2	0,022 5	0,045 2	0,072 2	0,097 0	0,113 7
12			0,000 1	0,000 6	0,003 4	0,011 3	0,026 4	0,048 1	0,072 8	0,094 8
13			—	0,000 2	0,001 3	0,005 2	0,014 2	0,029 6	0,050 4	0,072 9
14				0,000 1	0,000 5	0,002 2	0,007 1	0,016 9	0,032 4	0,052 1
15				—	0,000 2	0,000 9	0,003 3	0,009 0	0,019 4	0,034 7
16					0,000 1	0,000 3	0,001 4	0,004 5	0,010 9	0,021 7
17					—	0,000 1	0,000 6	0,002 1	0,005 8	0,012 8
18						—	0,000 2	0,000 9	0,002 9	0,007 1
19							0,000 1	0,000 4	0,001 4	0,003 7
20							—	0,000 2	0,000 6	0,001 9
21								0,000 1	0,000 3	0,000 9
22								—	0,000 1	0,000 4
23									—	0,000 2
24										0,000 1
25										—

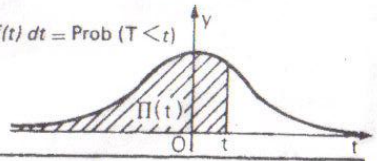
$$p(X = k) = e^{-m} \frac{m^k}{k!}.$$

k \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,367 9	0,135 3	0,049 8	0,018 3	0,006 7	0,002 5	0,000 9	0,000 3	0,000 1	—
2	0,735 8	0,406 0	0,199 1	0,091 6	0,040 4	0,017 4	0,007 3	0,003 0	0,001 2	0,000 5
3	0,919 7	0,676 7	0,423 2	0,238 1	0,124 7	0,062 0	0,029 6	0,013 8	0,006 2	0,002 8
4	0,981 0	0,857 1	0,647 2	0,433 5	0,265 0	0,151 2	0,081 8	0,042 4	0,021 2	0,010 4
5	0,996 3	0,947 3	0,815 2	0,628 8	0,440 5	0,285 1	0,173 0	0,099 6	0,055 0	0,029 3
6	0,999 4	0,983 4	0,916 1	0,785 1	0,616 0	0,445 7	0,300 7	0,191 2	0,115 7	0,067 1
7	0,999 9	0,995 5	0,966 5	0,889 3	0,762 2	0,606 3	0,449 7	0,313 4	0,206 8	0,130 2
8	1	0,998 9	0,988 1	0,948 9	0,866 6	0,744 0	0,598 7	0,453 0	0,323 9	0,220 3
9		0,999 8	0,996 2	0,978 6	0,931 9	0,847 2	0,729 1	0,592 5	0,455 7	0,332 9
10		1	0,998 9	0,991 9	0,968 2	0,916 1	0,830 5	0,716 6	0,587 4	0,458 0
11			0,999 7	0,997 2	0,986 3	0,957 4	0,901 5	0,815 9	0,706 0	0,583 1
12			0,999 9	0,999 1	0,994 5	0,979 9	0,946 6	0,888 1	0,803 0	0,696 8
13			1	0,999 7	0,998 0	0,991 2	0,973 0	0,936 2	0,875 8	0,791 6
14				0,999 9	0,999 3	0,996 4	0,987 2	0,965 8	0,926 1	0,864 5
15				1	0,999 8	0,998 6	0,994 3	0,982 7	0,958 5	0,916 6
16					0,999 9	0,999 5	0,997 6	0,991 8	0,978 0	0,951 3
17					1	0,999 8	0,999 0	0,996 3	0,988 9	0,973 0
18						1	0,999 6	0,998 4	0,994 7	0,985 7
19							0,999 9	0,999 3	0,997 6	0,992 8
20							1	0,999 7	0,998 9	0,996 5
21								0,999 9	0,999 6	0,998 4
22								1	0,999 8	0,999 3
23									0,999 9	0,999 7
24									1	0,999 9
25										1

$$F(k) = p(X < k) = \sum_{n=0}^{k-1} e^{-m} \frac{m^n}{n!}.$$

LOI NORMALE (répartition)

Probabilité cumulée $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt = \text{Prob}\,(T < t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 6	0,995 4	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

CAS DES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

NOTA. – La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t > 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table

$$\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$$

TABLE DE L'ECART-REDUIT

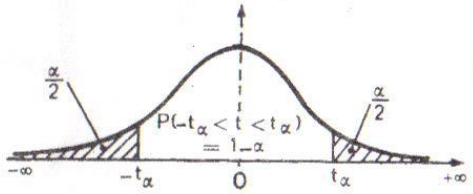
(Loi Normale)

La table donne la probabilité α extérieure à l'intervalle $(-t_\alpha \, , \, t_\alpha)$

Si t est l'écart réduit on a :

$$\alpha = P(t < -t_\alpha) + P(t > t_\alpha) = 2\,P(t < -t_\alpha) = 2\,P(t > t_\alpha)$$

(en raison de la symétrie)



Annexe I

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient en ajoutant les nombres inscrits en marge.

Exemples : Pour $t_\alpha = 1{,}96$ la probabilité est $\alpha = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$

Pour $t_\alpha = 0{,}994 \approx 1$, la probabilité est $\alpha = 0{,}30 + 0{,}02 = 0{,}32$

Table pour les petites valeurs de la probabilité α :

α	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
t_α	3,29053	3,89059	4,41717	4,89164	5,32672	5,73073	6,10941

IV. LOI DE LAPLACE-GAUSS

Densité

$\varphi_0(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398 9	0,398 9	0,398 9	0,398 8	0,398 6	0,398 4	0,398 2	0,398 0	0,397 7	0,397 3
0,1	0,397 0	0,396 5	0,396 1	0,395 6	0,395 1	0,394 5	0,393 9	0,393 2	0,392 5	0,391 8
0,2	0,391 0	0,390 2	0,389 4	0,388 5	0,387 6	0,386 7	0,385 7	0,384 7	0,383 6	0,382 5
0,3	0,381 4	0,380 2	0,379 0	0,377 8	0,376 5	0,375 2	0,373 9	0,372 5	0,371 2	0,369 7
0,4	0,368 3	0,366 8	0,365 3	0,363 7	0,362 1	0,360 5	0,358 9	0,357 2	0,355 5	0,353 8
0,5	0,352 1	0,350 3	0,348 5	0,346 7	0,344 8	0,342 9	0,341 0	0,339 1	0,337 2	0,335 2
0,6	0,333 2	0,331 2	0,329 2	0,327 1	0,325 1	0,323 0	0,320 9	0,318 7	0,316 6	0,314 4
0,7	0,312 3	0,310 1	0,307 9	0,305 6	0,303 4	0,301 1	0,298 9	0,296 6	0,294 3	0,292 0
0,8	0,289 7	0,287 4	0,285 0	0,282 7	0,280 3	0,278 0	0,275 6	0,273 2	0,270 9	0,268 5
0,9	0,266 1	0,263 7	0,261 3	0,258 9	0,256 5	0,254 1	0,251 6	0,249 2	0,246 8	0,244 4
1,0	0,242 0	0,239 6	0,237 1	0,234 7	0,232 3	0,229 9	0,227 5	0,225 1	0,222 7	0,220 3
1,1	0,217 9	0,215 5	0,213 1	0,210 7	0,208 3	0,205 9	0,203 6	0,201 2	0,198 9	0,196 5
1,2	0,194 2	0,191 9	0,189 5	0,187 2	0,184 9	0,182 6	0,180 4	0,178 1	0,175 8	0,173 6
1,3	0,171 4	0,169 1	0,166 9	0,164 7	0,162 6	0,160 4	0,158 2	0,156 1	0,153 9	0,151 8
1,4	0,149 7	0,147 6	0,145 6	0,143 5	0,141 5	0,139 4	0,137 4	0,135 4	0,133 4	0,131 5
1,5	0,129 5	0,127 6	0,125 7	0,123 8	0,121 9	0,120 0	0,118 2	0,116 3	0,114 5	0,112 7
1,6	0,110 9	0,109 2	0,107 4	0,105 7	0,104 0	0,102 3	0,100 6	0,098 9	0,097 3	0,095 7
1,7	0,094 0	0,092 5	0,090 9	0,089 3	0,087 8	0,086 3	0,084 8	0,083 3	0,081 8	0,080 4
1,8	0,079 0	0,077 5	0,076 1	0,074 8	0,073 4	0,072 1	0,070 7	0,069 4	0,068 1	0,066 9
1,9	0,065 6	0,064 4	0,063 2	0,062 0	0,060 8	0,059 6	0,058 4	0,057 3	0,056 2	0,055 1
2,0	0,054 0	0,052 9	0,051 9	0,050 8	0,049 8	0,048 8	0,047 8	0,046 8	0,045 9	0,044 9
2,1	0,044 0	0,043 1	0,042 2	0,041 3	0,040 4	0,039 6	0,038 7	0,037 9	0,037 1	0,036 3
2,2	0,035 5	0,034 7	0,033 9	0,033 2	0,032 5	0,031 7	0,031 0	0,030 3	0,029 7	0,029 0
2,3	0,028 3	0,027 7	0,027 0	0,026 4	0,025 8	0,025 2	0,024 6	0,024 1	0,023 5	0,022 9
2,4	0,022 4	0,021 9	0,021 3	0,020 8	0,020 3	0,019 8	0,019 4	0,018 9	0,018 4	0,018 0
2,5	0,017 5	0,017 1	0,016 7	0,016 3	0,015 8	0,015 4	0,015 1	0,014 7	0,014 3	0,013 9
2,6	0,013 6	0,013 2	0,012 9	0,012 6	0,012 2	0,011 9	0,011 6	0,011 3	0,011 0	0,010 7
2,7	0,010 4	0,010 1	0,009 9	0,009 6	0,009 3	0,009 1	0,008 8	0,008 6	0,008 4	0,008 1
2,8	0,007 9	0,007 7	0,007 5	0,007 3	0,007 1	0,006 9	0,006 7	0,006 5	0,006 3	0,006 1
2,9	0,006 0	0,005 8	0,005 6	0,005 5	0,005 3	0,005 1	0,005 0	0,004 8	0,004 7	0,004 6
3,0	0,004 4	0,004 3	0,004 2	0,004 0	0,003 9	0,003 8	0,003 7	0,003 6	0,003 5	0,003 4
3,1	0,003 3	0,003 2	0,003 1	0,003 0	0,002 9	0,002 8	0,002 7	0,002 6	0,002 5	0,002 5
3,2	0,002 4	0,002 3	0,002 2	0,002 2	0,002 1	0,002 0	0,002 0	0,001 9	0,001 8	0,001 8
3,3	0,001 7	0,001 7	0,001 6	0,001 6	0,001 5	0,001 5	0,001 4	0,001 4	0,001 3	0,001 3
3,4	0,001 2	0,001 2	0,001 2	0,001 1	0,001 1	0,001 0	0,001 0	0,001 0	0,000 9	0,000 9
3,5	0,000 9	0,000 8	0,000 8	0,000 8	0,000 8	0,000 7	0,000 7	0,000 7	0,000 7	0,000 6
3,6	0,000 6	0,000 6	0,000 6	0,000 5	0,000 5	0,000 5	0,000 5	0,000 5	0,000 5	0,000 4
3,7	0,000 4	0,000 4	0,000 4	0,000 4	0,000 4	0,000 4	0,000 3	0,000 3	0,000 3	0,000 3
3,8	0,000 3	0,000 3	0,000 3	0,000 3	0,000 3	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 2
3,9	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 2	0,000 1	0,000 1

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi_0(-x)$$

Fonction de répartition

$F_0(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6
3,0	0,998 7	0,998 7	0,998 7	0,998 8	0,998 8	0,998 9	0,998 9	0,998 9	0,999 0	0,999 0
3,1	0,999 0	0,999 1	0,999 1	0,999 1	0,999 2	0,999 2	0,999 2	0,999 2	0,999 3	0,999 3
3,2	0,999 3	0,999 3	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 5	0,999 5	0,999 5
3,3	0,999 5	0,999 5	0,999 5	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 7
3,4	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 8

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - F_0(-x).$$

Quand x est grand, on a approximativement :

$$F_0(x) = 1 - \frac{\varphi_0(x)}{x}$$